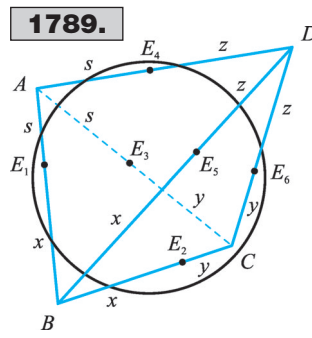


1788.



1789.



**1788.** Legyenek a gömb érintési pontjai a lapsíkokkal  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  és  $D'$ .  $OD' \perp [ABC] \Rightarrow OD' \perp BC$ ;  $OA' \perp [BCD] \Rightarrow OA' \perp BC$ . A két állításból  $BC \perp [OA'D'] \Rightarrow BC \perp A'D'$ . Hasonlóan belátható, hogy  $AB \perp C'D'$ ,  $AC \perp B'D'$ ,  $AD \perp B'C'$ ,  $BD \perp A'C'$  és  $DC \perp A'B'$ .

**1789.** Külső pontból a gömbhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak, így az ábrán egyformán jelölt szakaszokra is ez teljesül.  $BE_1 = BE_2 = BE_5 = x$ ;  $CE_2 = CE_3 = CE_6 = y$ ;  $DE_4 = DE_5 = DE_6 = z$ ;  $AE_1 = AE_3 = AE_4 = s$ .  $AD + BC = s + z + x + y$ ;  $AB + DC = s + x + y + z$ ;  $AC + BD = s + y + x + z$ . Tehát a három szemközti élpár hosszának összege egyenlő.

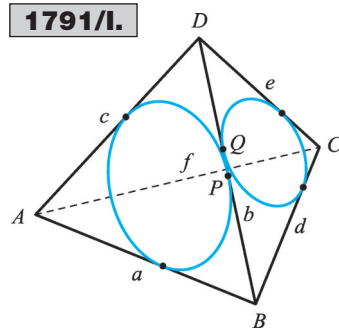
**1790.** Egy gömb bármely síkmetszete kör. Az oldallap síkmetszeten az éleknek nem lehet a metszatkörrel két közös pontjuk, mert a gömbbel is csak egy-egy van. Egy közös pontnak viszont lennie kell, hiszen a sík és a gömb közös részéről van szó. Legyen a  $BD$  közös élen az  $ABD\Delta$ -be írt kör érintési pontja  $P$ , a  $BCD\Delta$ -be írt kör érintési pontja  $Q$ .  $P$  és  $Q$  közös pontja a  $BD$  élnek és a gömbnek, ilyen pont pedig csak egy van  $\Rightarrow P \equiv Q$ .

**1791.** Rajzoljuk meg az  $ABD\Delta$ , illetve a  $BCD\Delta$  beírt körét. Ezek a  $BD$  élt  $P$ -ben, illetve  $Q$ -ban érintik. A beírt kör érintési pontjának helye:  $BP = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}$ , illetve

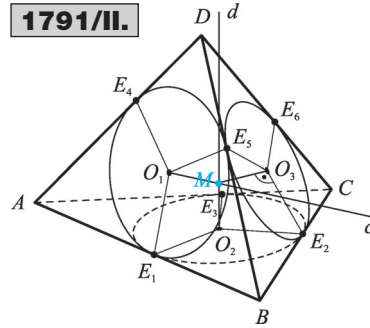
$$BQ = \frac{b+d+e}{2} - e = \frac{b+d-e}{2}. \text{ A feltétel szerint } a+e=c+d \Rightarrow BP=BQ. \text{ Hasonlóan}$$

belátható, hogy a szomszédos lapok beírt köreinek érintési pontjai az élnek ugyanazon pontjára esnek. Ha van élírtató gömb, akkor annak középpontja a lapsíkokra a beírt körök középpontjában állított merőlegeseken kell legyen.

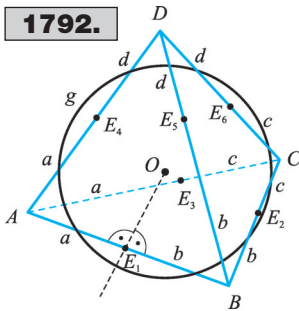
$AB \perp O_1E_1$  és  $AB \perp c \Rightarrow AB \perp [O_1E_1; c]$ ;  $AB \perp O_2E_1$  és  $AB \perp d \Rightarrow AB \perp [O_2E_1; d]$ .  $AB$ -re  $E_1$ -ben csak egy merőleges sík állítható, így  $c$  és  $d$  ebben a síkban vannak és metszik egymást. Legyen  $c \cap d = M$ .  $M \in c \Rightarrow ME_1 = ME_5 = ME_4$ ;  $M \in d \Rightarrow ME_1 = ME_2 = ME_3$ . A két összefüggésből



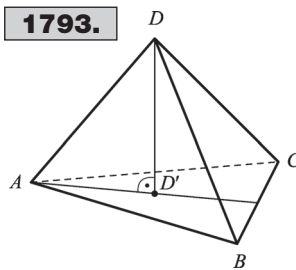
1791/I.



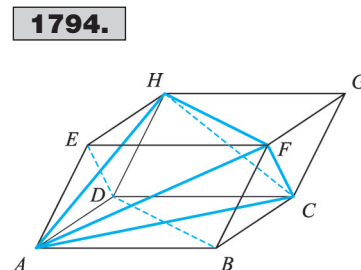
1791/II.



1792.



1793.



1794.

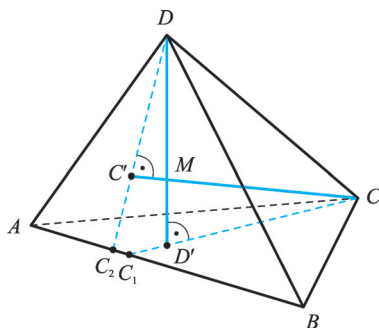
$ME_2 = ME_5$  (1) és  $ME_3 = ME_4$  (2) következik. Az (1) egyenlőséget vizsgálva: mivel az  $O_3$ -ban állított merőleges is metszené a  $d$ -t a fenti gondolatmenet szerint, így arra a metszéspontra  $M'E_2 = M'E_5 = M'E_6$  adódna, így  $M_1$ -nek és  $M$ -nek az  $E_2E_5$  felező merőleges síkján kell lenni, ami  $d$ -vel csak egy közös pontot adhat  $\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow ME_2 = ME_5 = ME_6$ . Ezt a (2) egyenlőséggel összevetve  $\Rightarrow M$  rajta van az  $O_4$ -ben állított merőleges  $\Rightarrow$  van érintő gömb.

**1792.** Az 1791. feladatban láttuk, hogy a feltételnek eleget tevő tetraédernek van érintő gömbje. Ehhez az érintő gömbhöz az  $A$  csúsból húzható érintők érintő szakaszai egyenlők egymással. Ugyanez mondható el a  $B, C$  illetve  $D$  csúcsokból húzott érintő szakaszokra is. Az  $A$  középpontú  $a$  sugarú  $g_A, B$  középpontú  $b$  sugarú  $g_B, C$  középpontú  $c$  sugarú  $g_C, D$  középpontú  $d$  sugarú  $g_D$  gömbök kölcsönösen érintik egymást:  $AE_1 \perp E_1O$ , mert  $g$  érintő gömb;  $BE_1 \perp E_1O$ , mert  $g$  érintő gömb  $\Rightarrow e(E_1; O)$  a  $g_A$  és  $g_B$  gömbök  $E_1$ -beli közös érintője. Hasonlóan megmutatható, hogy  $g_A$   $E_3$ -ban érinti  $g_C$ -t és  $E_4$ -ben érinti  $g_D$ -t. A többi gömb páronként való érintése is ugyanígy belátható.

**1793.**  $AD \perp BC$  a feltétel miatt.  $DD' \perp [ABC]$  a vetítés miatt  $\Rightarrow DD'$  merőleges  $[ABC]$  sík minden egyenesére  $\Rightarrow DD' \perp BC$ . Az aláhúzottakból  $\Rightarrow BC \perp [ADD'] \Rightarrow BC$  merőleges  $[ADD']$  minden egyenesére  $\Rightarrow BC \perp AD' \Rightarrow AD'$  az  $ABC\Delta$   $A$ -ból induló magasságvonala. Hasonlóan megmutatható, hogy  $CD'$  is,  $BD'$  is magasságvonal. A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást  $\Rightarrow D'$  a magasságpont az  $ABC\Delta$ -ben.

**1794.** Tekintsük azt az  $ABCDEFGH$  paralelepipedont, melynek  $A; C; F; H$  csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is.  $AC \perp FH$  és  $AH \perp FC \Rightarrow AC \perp BD$  és  $AH \perp DE \Rightarrow ABCD$ , illetve  $ADEH$  paralelogramma rombusz.  $\Rightarrow$  A paralelepipedon egy csúcsba futó élei egyenlők.  $\Rightarrow$  A paralelepipedon minden lapja rombusz.  $\Rightarrow$  A tetraéder harmadik élpárja is merőleges.

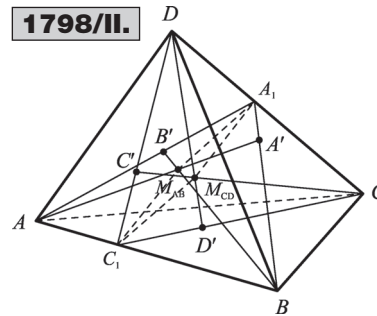
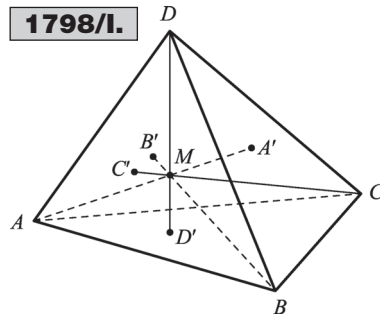
1795.



**1795.**  $DD' \perp [ABC] \Rightarrow DD' \perp AB$ ;  $CC' \perp [ABD] \Rightarrow CC' \perp AB$ . Az aláhúzottak szerint  $AB$  merőleges a  $DD'$  és  $CC'$  metsző egyenesek síkjára:  $AB \perp [CC'DD'] \Rightarrow AB$  merőleges a sík minden egyenesére  $\Rightarrow AB \perp CD$ .

**1796.** Tekintsük az 1795. ábrát.  $AB \perp DC$  és  $AB \perp DD' \Rightarrow AB \perp [CDD'] \Rightarrow AB \perp CD'$ . Legyen  $AB \cap e(C; D') = C_1 \Rightarrow [ABD] \cap [CDD'] = DC_1 \Rightarrow AB \perp DC_1$ .  $AB \perp DC$  és  $AB \perp CC' \Rightarrow AB \perp [CDC'] \Rightarrow AB \perp DC'$ .

Legyen  $AB \cap e(D; C') = C_2 \Rightarrow [ABD] \cap [CDC'] = DC_2 \Rightarrow AB \perp DC_2$ . Az aláhúzottakból  $C_1 \equiv C_2$ , mivel  $D$ -ből  $AB$ -re csak egy merőleges húzható  $\Rightarrow [DD'C] \equiv [CC'D] \Rightarrow CC'$  és  $DD'$  metsző egyenesek (a  $CC_1D\Delta$  magasságvonalai).



**1797.** Tekintsük az 1795. ábrát. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha  $DD' \cap CC' \neq \emptyset$ , akkor  $DC \perp AB$ . Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha  $AB \perp DC$ , akkor  $AA' \cap BB' \neq \emptyset$ .

**1798. I.** Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder ortocentrikus, akkor szemközti élpárjai merőlegesek egymásra. Az 1795. feladatban láttuk, hogy ha  $CC'$  metszi  $DD'$ -t, akkor  $DC \perp AB$ . Hasonlóan megmutatható, hogy  $BD \perp AC$  és  $AD \perp BC$ . Az aláhúzottak éppen a bizonyítandó állítást jelentik.

**II.** Megmutatjuk, hogy ha egy tetraéder szemközti élpárjai merőlegesek egymásra, akkor ortocentrikus. Az 1796. feladatban láttuk, hogy ha  $AB \perp DC$ , akkor  $DD'$  és  $CC'$  metszik egymást, síkjuk az  $AB$  élre merőleges és a síkmetszet magasságvonalai a  $DD'$  és  $CC'$  testmagasságok.  $\Rightarrow M_{DC}$  a  $DCC_1\Delta$  magasságpontja. Hasonlóan belátható, hogy  $M_{AB}$  az  $ABA_1\Delta$  magasságpontja. Vegyük az  $[ABA_1]$  és  $[CDC_1]$  síkok metszetét.  $C_1 \in AB$  és  $A_1 \in DC$  miatt a metszévonal a  $C_1A_1$  szakasz.  $DC \perp [ABA_1]$  miatt  $DC \perp C_1A_1 \Rightarrow C_1A_1$  magasságvonal a  $DCC_1\Delta$ -ben  $\Rightarrow M_{CD} \in C_1A_1$ . Hasonlóan belátható, hogy  $M_{AB} \in C_1A_1$ . Mivel  $M_{AB}$  és  $M_{CD}$  az  $AD$ -re illeszkedő  $BC$ -re merőleges, illetve  $BC$ -re illeszkedő és  $AD$ -re merőleges síkon is rajta vannak, és ezek metszévonal a biztosan nem  $C_1A_1$ , így a négy sík közös részén is rajta kell legyenek, ami egyetlen pont.  $\Rightarrow A$  testmagasságok egy pontban metszik egymást.

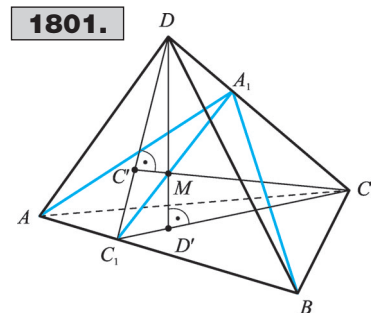
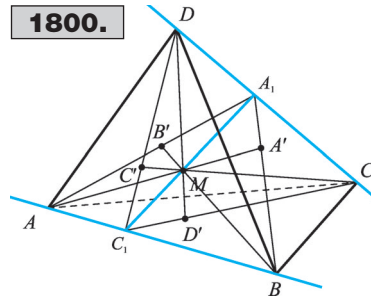
**1799.** Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Tekintsük azt az  $ABCDEFGH$  paralelepipedont, melynek  $A; C; F; H$  csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt  $ABCDEFGH$  lapjai rombuszok (1798. feladat és 1794. feladat). Pitagorasz tételét felírva a paralelepipedon éle mint átfogó és a tetraéder két szemközti élének fele mint befogó által meghatározott derékszögű háromszögekre:

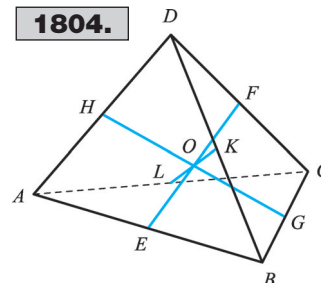
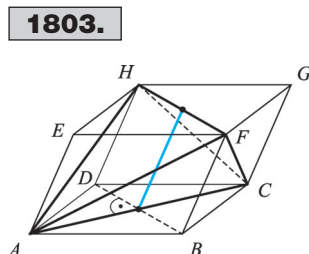
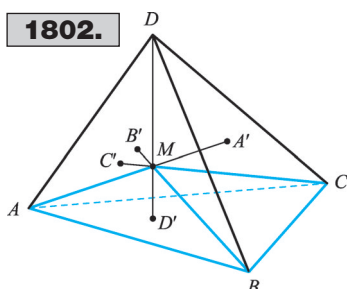
$$\frac{AC^2}{4} + \frac{HF^2}{4} = b^2 = \frac{AF^2}{4} + \frac{HC^2}{4} = \frac{AH^2}{4} + \frac{FC^2}{4}. \Rightarrow A$$

tetraéder szemközti élének négyzetösszege állandó.

**1800.** Az 1798. feladatban láttuk, hogy a tetraéder magasságvonalai illeszkednek a tetraéder egyik élén át a vele szemben levő élre merőleges síkra (pl.  $DD'$  benne van a  $DC$ -re illeszkedő,  $AB$ -re merőleges síkban). Az  $AB$ -re, illetve  $DC$ -re illeszkedő ilyen síkok  $A_1C_1$  metszévonal a átmege az  $M$  magasságponton és  $A_1C_1 \perp AB$ , illetve  $A_1C_1 \perp DC$  (l. az 1798. feladat megoldását). A merőlegesség miatt  $A_1C_1$  az  $AB$  és  $DC$  élek normáltranszverzálisa, ami így átmege  $M$ -en.

**1801.** Az 1800. feladatban láttuk, hogy az  $AB$ -re illeszkedő  $DC$ -re merőleges sík és a  $CD$ -re illeszkedő  $AB$ -re merőleges sík  $A_1C_1$  metszévonal a  $AB$  és  $DC$  élek nor-





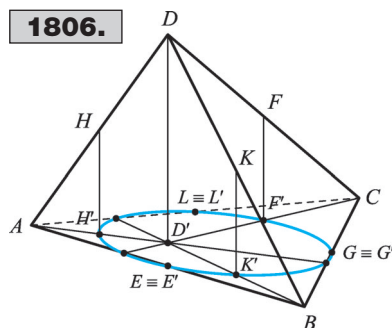
máltranszverzálisa, és átmegy  $M$ -en. Jelöljük az  $AB$ -re merőleges síkot  $S_{AB}$ -vel.  $S_{AB} = [DCC_1]$ ,  $AB \perp S_{AB} \Rightarrow AB \perp DC_1 \Rightarrow DC_1$  az  $ABD\Delta$  magasságvonala,  $C_1$  a magasságtalppont. Hasonlóan belátható, hogy  $BA_1$  a  $BCD\Delta$  magasságvonala  $\Rightarrow A_1$  a magasságtalppont.

**1802.**  $AA' \perp [BCD] \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow AM \perp BC$ . Hasonlóan megmutatható, hogy  $BM \perp AC$  és  $CM \perp AB$ . A fentiekből következik, hogy az  $ABCM$  tetraéder ortocentrikus.  $DD' \perp [ABC] \Rightarrow MD'$  az  $[ABC]$  síkhoz tartozó magasságvonal.  $CC' \perp [ABD] \Rightarrow CC' \perp AD \Rightarrow CM \perp AD \Rightarrow ABCD$  tetraéder ortocentrikus  $\Rightarrow BC \perp AD$ . A kétszer aláhúzottakból következik, hogy  $AD \perp [BCM] \Rightarrow AD$  a  $[BCM]$  síkhoz tartozó magasságvonal  $\Rightarrow AD \cap DD' = D$  az  $ABCM$  tetraéder magasságpontja (mivel ortocentrikus, elég egy pár magasságvonal metszéspontja). Hasonlóan látható be az állítás a többi tetraéderre is.

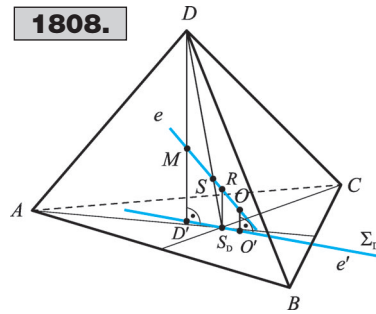
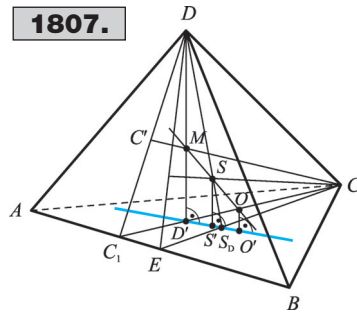
**1803.** Tekintsük azt az  $ABCDEFGH$  paralelepipedont, melynek  $A; C; F; H$  csúcsai egyben a tetraéder csúcsai is. A szemközti élek merőlegessége miatt a paralelepipedon lapjai rombuszok. A paralelepipedon szemközti lapközepontjai a tetraéder szemközti élfelező pontjai, melyeket összekötő szakasz a paralelepipedon egyik élével párhuzamos és egyenlő. Mivel az ortocentrikus tetraédert magába foglaló paralelepipedon minden éle egyenlő, ezért a tetraéder élfelező pontjait összekötő szakaszok is egyenlők.

**1804.** Az 1803. feladatban láttuk, hogy  $EF = GH = KL$ .  $EGFH$  paralelogramma átlói felezik egymást, így  $HG \cap EF = O$  pontra  $OE = OG = OF = OH$ . Az  $ELFK$  paralelogramma átlóinak metszéspontja ugyancsak a fenti  $O$  pont, hiszen  $EF$ -nek csak egy felezéspontja van  $\Rightarrow OE = OL = OF = OK$ . Az aláhúzottakból  $OE = OG = OL = OH = OK = OF \Rightarrow E, G, L, H, K, F$  egy  $O$  középpontú gömbön vannak.

**1805.** Tekintsük az 1804. ábrát. Az  $ABC\Delta$  Feuerbach köre átmegy az  $E, L$  és  $G$  pontokon.  $E, L$  és  $G$  egyértelműen meghatározzák a saját körüket, így a gömb és a sík metszete csak az  $ABC\Delta$  Feuerbach köre lehet. Hasonlóan belátható a többi lapra is az állítás.



**1806.**  $DD' \perp [ABC] \Rightarrow DD' \perp AB$ .  $ABCD$  tetraéder ortocentrikus  $\Rightarrow DC \perp AB$ . Az aláhúzottakból  $\Rightarrow AB \perp [DD'C] \Rightarrow D'C \perp AB \Rightarrow D'C$  az  $ABC\Delta$   $C$ -ből induló magasságvonala. Hasonlóan igaz, hogy  $D'A$  és  $D'B$  is magasságvonal  $\Rightarrow D'$  az  $ABC\Delta$  magasságpontja.  $H$  felezi  $AD$ -t  $\Rightarrow H'$  felezi  $AD'$ -t. Hasonlóan igaz, hogy  $K'$  felezi  $BD'$ -t és  $F'$  felezi  $CD'$ -t.  $E, G, L \in [ABC] \Rightarrow E \equiv E', G \equiv G', L \equiv L'$ . Az  $ABC\Delta$ -ben:  $E', G'$  és  $L'$  oldalfelező pontok;  $K', F'$  és  $H'$  felezik a csúcs és a magasságpont közti szakaszt.  $\Rightarrow$  ezek a pontok rajta vannak az  $ABC\Delta$  Feuerbach körén.



**1807.** Az 1806. feladatban megmutattuk, hogy az  $M$  magasságpont  $[ABC]$  síkra vetett merőleges vetülete az  $ABC\Delta D'$  magasságpontja.  $OA = OB = OC$  miatt  $O'$  az  $ABC\Delta$  körülírt körének középpontja.  $e(O'; D')$  az  $ABC\Delta$  Euler egyenese, és az  $S_D$  súlypont az  $O'D'$  szakasz  $O'$ -höz közelebbi harmadolópontja:  $\underline{D'S_D = 2S_D O'}$ .  $O', S_D, D'$  egy egyenesen vannak. Tudjuk, hogy  $S \in DS_D \Rightarrow O, S, M$  egy síkban vannak, a  $D, M$  és  $O$  pontok által kifeszített síkban, ami merőleges az  $[ABC]$  síkra. Hasonlóan megmutatható, hogy  $O, S$  és  $M$  a  $B, M$  és  $O$  pontok által kifeszített síkban is benne vannak, így a két sík metszésvonalán is, ami egyenes  $\Rightarrow O, S, M$  egy egyenesen vannak. A merőleges vetítés aránytartó, így  $MS : SO = M'S' = S'O'$ .  $DD'S_D\Delta$ -ben:  $DS : SS_D = 3 : 1 \Rightarrow D'S' : S'S_D = 3 : 1 \Rightarrow \underline{D'S' = 3S'S_D}$ . Az aláhúzott állításokat vizsgálva:  $2S_D O' = D'S_D = D'S' + S'S_D = 3S'S_D + S'S_D = 4S'S_D \Rightarrow S_D O' = 2S'S_D$ .  $\underline{S'O' = S'S_D + S_D O' = S'S_D + 2S'S_D = 3S'S_D = D'S'}$ .  $\Rightarrow S'$  felezi az  $O'D'$  szakaszt, tehát  $S'$  az  $ABC\Delta$  Feuerbach körének középpontja.

**1808.** Az 1807. feladatban láttuk, hogy  $D, M, S, O$  pontok az  $[ABC]$  síkra merőleges  $\Sigma_D$  síkban vannak, és a két sík metszésvonala az  $ABC\Delta e'$  Euler egyenese  $\Rightarrow S_D$  súlypont is az  $e'$  Euler egyenesen van  $\Rightarrow$  az  $S_D$ -ben állított merőleges is a  $\Sigma_D$  síkban van és metszi az  $e$  egyenest  $\Rightarrow R_D$ . Az  $e'$  Euler-egyenes pontjaira teljesül, hogy  $D'S_D = 2S_D O' \Rightarrow MR_D = 2R_D O$ . Hasonlóan megmutatható, hogy a többi lapsúlypontba állított merőleges is metszi a tetraéder Euler egyenesét az  $MO$  szakasz  $O$ -höz közelebbi harmadolópontjában, így  $R_D = R_A = R_C = R_B = R$ .  $\Sigma_D$  síkban:

$$SRS_D\Delta \sim SMD\Delta, \text{ mert szögeik páronként egyenlők (csúciszögek, váltószögek)} \Rightarrow \lambda = \frac{RS}{SM} =$$

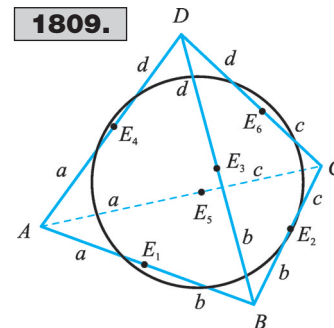
$$= \frac{RS_D}{MD}. \text{ Az 1807. feladatban láttuk, hogy } MS = SO. \text{ Fönt megmutattuk, hogy } MR = 2RO \Rightarrow$$

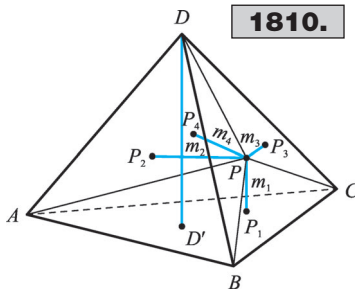
$$\Rightarrow MR = \frac{2}{3} MO = \frac{4}{3} MS \Rightarrow MS + SR = \frac{4}{3} MS \Rightarrow \underline{SR = \frac{1}{3} MS}.$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3} MS}{MS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{RS_D}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{MD = 3RS_D}. \text{ Hasonlóan belátható, hogy } MB = 3RS_B, MC = 3RS_C, MA = 3RS_A.$$

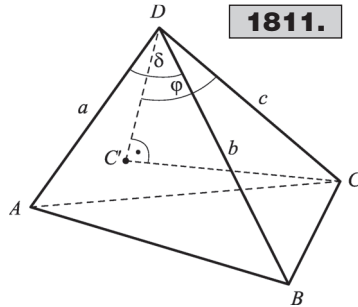
**1809.** Felhasználjuk: Egy tetraédernek akkor és csak akkor van érintő gömbje, ha szemközti éleinek összege páronként egyenlő (1789. és 1791. feladat). Ortocentrikus tetraéder szemközti éleinek négyzetösszege páronként egyenlő (1799. feladat).

**I.** Ha  $ABC\Delta$  szabályos és  $DA = DB = DC$ , akkor a szemközti élek összege páronként egyenlő  $\Rightarrow$  van érintő gömb.

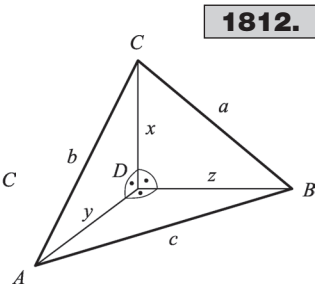




1810.



1811.



1812.

II. Válasszuk az ábra szerinti jelölést. A tetraéder ortocentrikus:

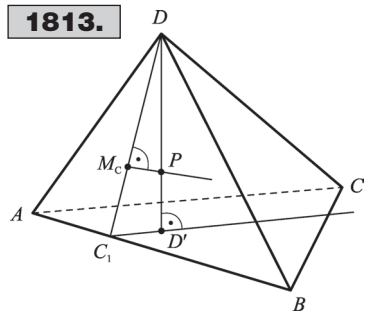
$(a + b)^2 + (c + d)^2 = (b + d)^2 + (a + c)^2$  (1).  $(b + d)^2 + (a + c)^2 = (a + d)^2 + (b + c)^2$  (2).  
 (1)  $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2cd + d^2 = b^2 + 2bd + d^2 + a^2 + 2ac + c^2 \Rightarrow ab + cd = bd + ac \Rightarrow$   
 $\Rightarrow b \cdot (a - d) = c \cdot (a - d) \Rightarrow (a - d) \cdot (b - c) = 0$ . (2)-t hasonlóan átalakítva:  $(c - d) \cdot (a - b) = 0$ .  
 (1) megoldására a következő lehetőségek vannak: a)  $a = d \Rightarrow (2) (c - a)(a - b) = 0 \Rightarrow c = a$  vagy  
 $a = b$ . b)  $b = c \Rightarrow (2) (c - d)(a - c) = 0 \Rightarrow c = d$  vagy  $a = c$ . Pl. a) esetben, ha  $c = a$ :  $AB = a + b$ ;  
 $BC = c + b = a + b$ ;  $CA = a + c = 2a$ ;  $DA = d + a = 2a$ ;  $DB = d + b = a + b$ ;  $DC = d + c = 2a \Rightarrow$   
 $\Rightarrow ADC\Delta$  szabályos:  $AB = DB = CB$ . A többi eset is hasonlóan belátható.

**1810.** Felhasználjuk: a szabályos tetraéder testmagasságai egyenlők és a tetraéder térfogata  $V = \frac{t_{\text{alap}} \cdot M}{3}$ . Bontsuk fel a tetraédert a P pontból induló PA, PB, PC és PD szakaszokkal négy részre.  $V_{ABCD} = V_{ABCP} + V_{BCDP} + V_{ACDP} + V_{ABDP}$ .  $\frac{T_{\Delta} \cdot M}{3} = \frac{T_{\Delta} \cdot m_1}{3} + \frac{T_{\Delta} \cdot m_3}{3} + \frac{T_{\Delta} \cdot m_4}{3} + \frac{T_{\Delta} \cdot m_2}{3}$ .

Egyszerűsítés után:  $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ .

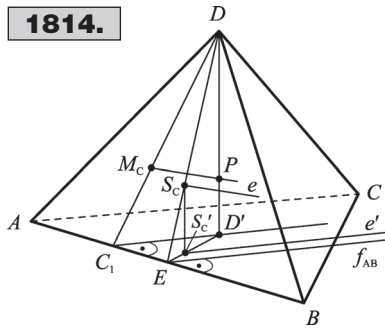
**1811.**  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab \cdot \sin \delta}{2} \cdot c \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} ab \cdot \sin \delta \cdot c \cdot \sin \varphi \leq \frac{1}{6} abc \cdot \sin \delta \leq 1$ , egyenlőség  $\delta = 90^\circ$  esetén.  $\sin \varphi \leq 1$ , egyenlőség  $\varphi = 90^\circ$  esetén. Ha  $\varphi = 90^\circ$ , akkor  $DC \perp [ABD] \Rightarrow DC \perp DB, DC \perp AD$ . Maximális a térfogat, ha D-nél  $\sphericalangle (a; b) = \sphericalangle (b; c) = \sphericalangle (c; a) = 90^\circ$ .

**1812.** Pitagorasz-tétel a D csúcsú derékszögű  $\Delta$ -ekre:  $x^2 + y^2 = b^2$  (1);  $y^2 + z^2 = c^2$  (2);  $z^2 + x^2 = a^2$  (3). (1) + (2) + (3):  $2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 + b^2 + c^2$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = s^2$ ;  
 $x^2 + y^2 \rightarrow$  (1)-be:  $s^2 - z^2 = b^2 \Rightarrow z = \sqrt{s^2 - b^2}$ ;  $y^2 + z^2 \rightarrow$  (2)-be:  $s^2 - x^2 = c^2 \Rightarrow x = \sqrt{s^2 - c^2}$ ;  
 $z^2 + x^2 \rightarrow$  (3)-ba:  $s^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{s^2 - a^2}$ ;  $V = \frac{1}{6} xyz = \frac{1}{6} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)(s^2 - c^2)}$ .

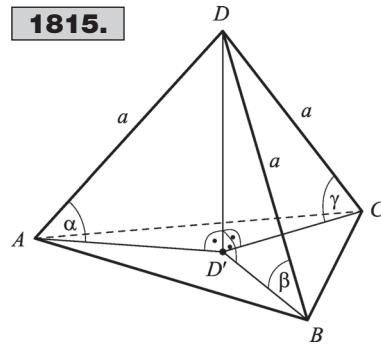


1813.

**1813.** Legyen  $DC_1$  az  $ABD\Delta$  magasságvonala  $\Rightarrow DC_1 \perp AB$ . Legyen D pont vetülete  $[ABC]$ -ra  $D' \Rightarrow DD' \perp [ABC] \Rightarrow DD' \perp AB$ . Az aláhúzottakból  $AB \perp [DC_1D']$ . Az  $M_C$ -ben  $[ABD]$  síkra állított merőleges benne van a  $[DC_1D']$  síkban  $\Rightarrow e(M_C; P)$  merőleges vetülete rajta van a  $C_1D'$  egyenesen. Hasonlóan megmutatható, hogy a másik két lapra állított merőleges vetülete is egy-egy  $D'$ -n átmenő egyenes, így metszéspontjuk a  $D'$  pont.



1814.



1815.

**1814.**  $DS_C = 2S_C E$ , mert  $S_C$  súlypont az  $ABD\Delta$ -ben. Az  $S_C$ -ben állított  $e$  merőleges párhuzamos  $M_C P$ -vel.  $e$  vetülete  $e'$  is párhuzamos  $M_C P$  vetületével  $C_1 D'$ -vel.  $S_C$  az  $ED$  szakasz  $E$ -hez közelebbi harmadolópontja.  $e'$  az  $S'_C$ -re illeszkedő  $AB$ -re merőleges egyenes. A  $D'$  középpontú  $\frac{2}{3}$  arányú középpontos hasonlóság  $E$ -t  $S'_C$ -be, az  $E$ -re illeszkedő  $AB$ -re merőleges  $f_{AB}$  felező merőlegest  $e'$ -be viszi. Az  $ABC\Delta$  oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  hasonló képek, a merőleges vetületek is egy pontban metszik egymást.

**1815.**  $DD'A\Delta \cong DD'B\Delta \cong DD'C\Delta$ , mert mindhárom derékszögű, átfogók egyenlők, egyik befogójuk közös  $\Rightarrow$  másik befogójuk is egyenlő:  $D'A = D'B = D'C \Rightarrow D'$  az  $ABC\Delta$  körülírt körének középpontja.

**1816.** Tekintsük az 1815. ábrát.  $DD'A\Delta \cong DD'B\Delta \cong DD'C\Delta$ , mert mindhárom derékszögű, átfogók egyenlők, egyik befogójuk közös  $\Rightarrow DD'$ -vel szemközti szögek is egyenlők  $\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$ .

**1817.** Bontsuk fel a tetraédert a beírható gömb középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre. A kapott tetraéderek egy-egy lapja az eredeti tetraéderével közös, ehhez a laphoz tartozó magassága pedig  $r$ .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot t_{BCD} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot t_{ACD} \cdot r + \frac{1}{3} \cdot t_{ABD} \cdot r =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot r \cdot A_{ABCD} \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot m_1 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot A_{ABCD} \Rightarrow t_{ABC} = \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_1}.$$

$$\text{Hasonlóan } t_{BCD} = \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_2}, \quad t_{ACD} = \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_3}, \quad t_{ABD} =$$

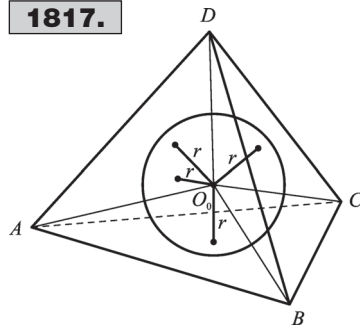
$$= \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_4} \cdot A_{ABCD} = t_{ABC} + t_{BCD} + t_{ACD} + t_{ABD} = \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_1} +$$

$$+ \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_2} + \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_3} + \frac{r \cdot A_{ABCD}}{m_4} \cdot \frac{A_{ABCD}}{r \cdot A_{ABCD}} = \frac{1}{m_1} +$$

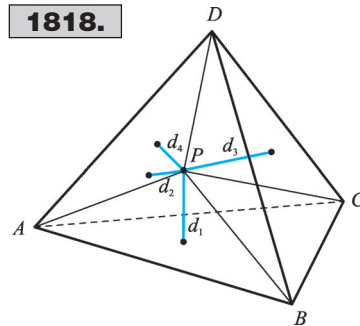
$$+ \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}.$$

**1818.** Bontsuk fel a tetraédert  $P$ -ből a csúcsokba húzott szakaszokkal négy részre.  $V = V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot m_i$ ;

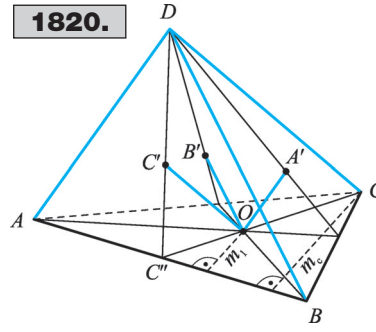
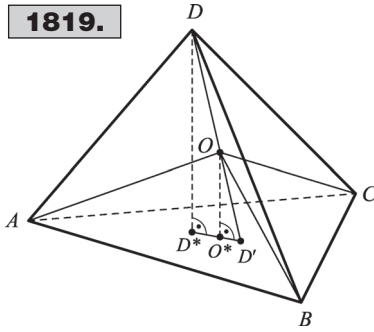
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot d_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{m_1}. \text{ Hasonlóan megmutatható,}$$



1817.



1818.



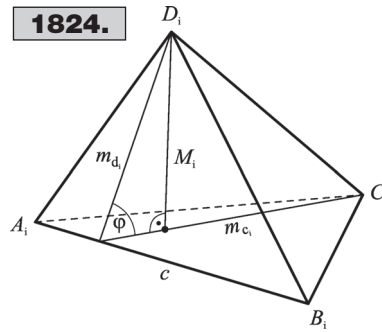
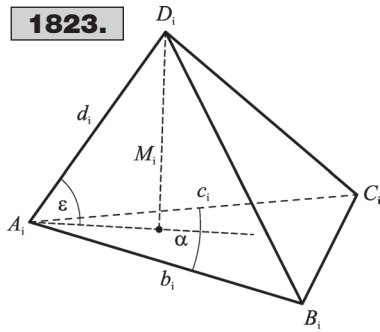
hogy  $\frac{V_2}{V} = \frac{d_2}{m_2}, \frac{V_3}{V} = \frac{d_3}{m_3}, \frac{V_4}{V} = \frac{d_4}{m_4}. \frac{V_1}{V} + \frac{V_2}{V} + \frac{V_3}{V} + \frac{V_4}{V} = \frac{d_1}{m_1} + \frac{d_2}{m_2} + \frac{d_3}{m_3} + \frac{d_4}{m_4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 1 = \frac{d_1}{m_1} + \frac{d_2}{m_2} + \frac{d_3}{m_3} + \frac{d_4}{m_4}.$

**1819.** Vetítsük a  $D$  és  $O$  pontokat az  $[ABC]$  síkra  $\Rightarrow D^*, O^*. OO^*D'\Delta \sim DD^*D'\Delta$ , mert szögeik egyállásúak  $\Rightarrow \lambda = \frac{OO^*}{DD^*} = \frac{OD'}{DD'}. V_{ABCO} = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot DD^*; V_{ABCO} = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot OO^* \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{OO^*}{DD^*} = \frac{OD'}{DD'}. \text{Hasonlóan megmutatható, hogy } \frac{V_{ABDO}}{V_{ABCD}} = \frac{OC'}{CC'}, \frac{V_{BCDO}}{V_{ABCD}} = \frac{OA'}{AA'},$   
 $\frac{V_{ACDO}}{V_{ABCD}} = \frac{OB'}{BB'}. \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = \frac{V_{ABCO} + V_{BCDO} + V_{ACDO} + V_{ABDO}}{V_{ABCD}} = 1.$

**1820.**  $OC' \parallel DC \Rightarrow O, C', C, D$  egy síkban vannak  $\Rightarrow$  síkjuknak az  $[ABC]$  síkkal való metszésvonala  $OC$ , az  $[ABD]$  síkkal való metszésvonala  $DC' \Rightarrow DC'$  és  $OC$  egyenes az  $[ABC]$  és  $[ABD]$  síkok  $AB$  metszésvonalán metszik egymást  $\Rightarrow C'' \in AB. OC' \parallel DC$  miatt  $C''OC'\Delta \sim$   
 $\sim C''CD\Delta$ , mert szögeik egyállású szögek  $\Rightarrow \lambda = \frac{C'O}{DC} = \frac{C''O}{C''C} = \frac{m_1}{m_c} = \frac{t_{ABO}}{t_{ABC}}. \text{Hasonlóan be-}$   
 látható, hogy  $\frac{B'O}{DB} = \frac{t_{ACO}}{t_{ABC}}$  és  $\frac{A'O}{DA} = \frac{t_{BCO}}{t_{ABC}}. \frac{C'O}{DC} + \frac{B'O}{DB} + \frac{A'O}{DA} = \frac{t_{ABO}}{t_{ABC}} + \frac{t_{ACO}}{t_{ABC}} + \frac{t_{BCO}}{t_{ABC}} =$   
 $= \frac{t_{ABC}}{t_{ABC}} = 1.$

**1821.** Legyen  $CD$  felezőpontja  $E$ , a vizsgált sík az  $[ABE]$ .  $E$  felezi  $DC$ -t  $\Rightarrow BE$  súlyvonal a  $BCD\Delta$ -ben  $\Rightarrow t_{BCE} = t_{BED}$ . Az  $ABED$  tetraéder  $[BED]$  laphoz tartozó magassága egybeesik az  $ABCE$  tetraéder  $[BCE]$  laphoz tartozó magasságával ( $A$ -ból a  $[DBC]$  síkra bocsátott merőleges).  $V_{BECA} = \frac{1}{3} \cdot t_{BEC} \cdot M_A = \frac{1}{3} \cdot t_{BED} \cdot M_A = V_{BEDA}$ .

**1822.** Tekintsük az 1807. ábrán a  $DD'S_D$  háromszöget. Felhasználjuk: a tetraéder súlypontja a súlyvonal oldalhoz közelebbi negyedelőpontja. Vegyük a  $D$  csúcspont és az  $S$  súlypont  $[ABC]$  síkra vetett merőleges vetületét  $\rightarrow D'S'. DD'S_D\Delta \sim SS'S_D\Delta$ , mert szögeik egyállásúak  $\Rightarrow \lambda =$   
 $= \frac{DS_D}{SS_D} = \frac{DD'}{SS'}. DS_D = 4SS_D$ -t felhasználva  $DD' = 4SS'. V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot DD' = \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot 4SS' =$   
 $= 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{ABC} \cdot SS' = 4V_{ABCS'}. \text{Hasonlóan megmutatható, hogy a súlypont a többi lappal is negyed-}$   
 akkora térfogatú tetraédert alkot, mint az  $ABCD$  tetraéder.



$$\mathbf{1823.} \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot t_{A_i B_i C_i} \cdot M_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{b_i \cdot c_i \cdot \sin \alpha}{2} \cdot d_i \cdot \sin \varepsilon = \frac{1}{6} \cdot b_i \cdot c_i \cdot d_i \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varepsilon.$$

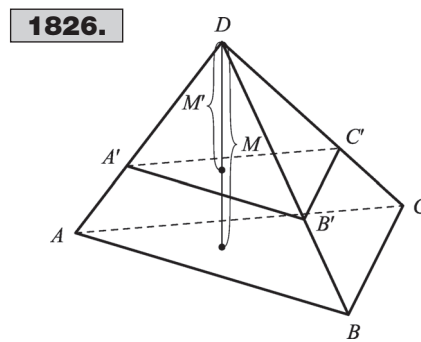
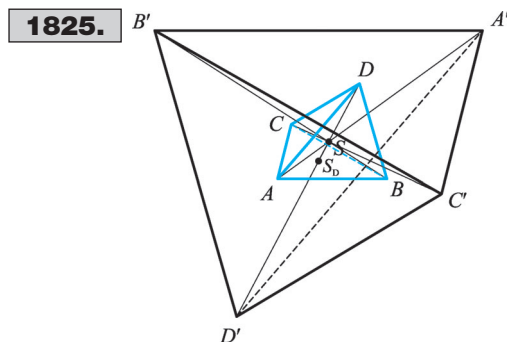
$$\text{Hasonlóan } V_2 = \frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varepsilon. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6} \cdot b_i \cdot c_i \cdot d_i \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varepsilon}{\frac{1}{6} \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varepsilon} = \frac{b_i \cdot c_i \cdot d_i}{b_2 \cdot c_2 \cdot d_2}.$$

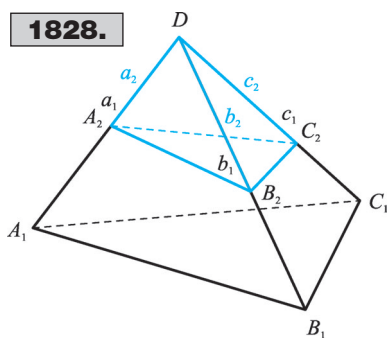
$$\mathbf{1824.} \quad V_1 = \frac{1}{3} \cdot T_{A_i B_i C_i} \cdot M_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{c \cdot m_{c_i}}{2} \cdot m_{d_i} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} \cdot c \cdot m_{c_i} \cdot m_{d_i} \cdot \sin \varphi. \text{ Hasonlóan } V_2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2} \cdot \sin \varphi. \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{c \cdot m_{c_i} \cdot m_{d_i}}{c \cdot m_{c_2} \cdot m_{d_2}} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_i} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_i}}{\frac{1}{2} c \cdot m_{c_2} \cdot \frac{1}{2} c \cdot m_{d_2}} = \frac{T_{A_i B_i C_i} \cdot T_{A_i B_i D_i}}{T_{A_2 B_2 C_2} \cdot T_{A_2 B_2 D_2}}.$$

**1825.** Az  $ABCD$  tetraéder  $DS_D$  súlyvonalát az  $S$  súlypont  $1:3$  arányban osztja  $\Rightarrow$  Az  $S$  középpontú  $(-3)$  arányú középpontos nagytítás  $S_D$ -t  $D$ -be viszi, tehát az  $[ABC]$  síkot a  $D$ -n átmenő, vele párhuzamos síkba. Hasonlóan a többi oldallapra is megfelelő ez a hasonlóság, tehát a feladatban megadott tetraéderhez vezet.  $\Rightarrow ABCD \sim A'B'C'D'$  és  $\lambda = (-3) \Rightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{A'B'C'D'}} = \lambda^3 = \underline{\underline{27}}$ .

**1826.**  $\frac{F_{A'B'C'D'}}{F_{ABCD}} = \frac{1}{2}$ . A levágott tetraéder a  $D$  középpontból középpontosan hasonló az eredetihez:  $\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt{\frac{F_{A'B'C'D'}}{F_{ABCD}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow M' = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot M}}$ .



**1828.**

**1827.** Tekintsük az 1826. ábrát.  $\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'}} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{A'B'C'D} = q \cdot V_{ABCA'B'C'}$ . A levágott tetraéder  $D$  középpontból középpontosan hasonló az eredetihez.

$$\lambda = \frac{M'}{M} = \sqrt[3]{\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCA'B'C'} + V_{A'B'C'D}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{q \cdot V_{ABCA'B'C'}}{V_{ABCA'B'C'} + q \cdot V_{ABCA'B'C'}}} = \sqrt[3]{\frac{q}{q+1}}.$$

**1828.** Az 1823. feladatban láttuk, hogy  $\frac{V_{A_2 B_2 C_2 D}}{V_{A_1 B_1 C_1 D}} =$

$$= \frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}. \text{ A „maradék” test térfogata: } V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1 =$$

$$= \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} \cdot V_1. \quad \frac{V}{V_1} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}.$$

**1829.** Tekintsük az 1794. ábrát. Az  $F$  csúcsból induló lapátlók ( $FA$ ;  $FC$ ;  $FH$ ) a tetraéder élei. Ezeknek  $F$ -től különböző végpontjait összekötő szakaszok:  $AC$  a  $ABCD$  lap átlója;  $CH$  a  $CDHG$  lap átlója;  $AH$  az  $ADHE$  lap átlója.

**1830.** Az 1794. ábra jelöléseit használjuk. Az  $A$  csúcsból kiinduló lapátlók meghatározzák az  $ACFH$  tetraédert. Ugyanehhez a tetraéderhez jutunk, ha a  $C$ ; az  $F$ ; illetve a  $H$  csúcsból induló lapátlókat tekintjük. A kihagyott négy csúcs ( $B$ ;  $D$ ;  $E$ ;  $G$ ) bármelyikéből indulunk ki, a  $BDEG$  tetraédert kapjuk.

**1831.** Az  $AB$  élre  $DC$ -vel párhuzamos síkot fektetünk. A  $DC$  élre  $AB$ -vel párhuzamos síkot fektetünk.  $\Rightarrow$  Ez a két sík párhuzamos egymással. Hasonlóan párhuzamos egymással a  $BC$ -re és  $AD$ -re; illetve a  $BD$ -re és  $AC$ -re fektetett két-két sík. Két-két-két párhuzamos sík által meghatározott test egy paralelepipedon, a síkok közül három-háromnak közös pontja a tetraéder négy csúcsa.  $\Rightarrow$  Ez egy a tetraéder köré írható paralelepipedon.

**1832.** Ha egy paralelepipedon egy tetraéder köré írható, akkor a tetraéder egyik élét tartalmazó lapja párhuzamos kell legyen a szemközti lappal, azaz az azon lévő éllel is.  $\Rightarrow$  A tetraéder köré írható paralelepipedon az 1831. feladatban ismertetett eljárással létrehozható, az pedig egyetlen testet határoz meg.

**1833.** A kockába írt tetraéder minden éle a kocka egy lapátlója. A kocka lapjai egybevágóak  $\Rightarrow$  lapátlói egyenlők, tehát a tetraéder minden éle egyenlő.

**1834.** A szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon szemközti lapjai olyan paralelogrammák, melyeknek két átlója egyenlő hosszú.  $\Rightarrow$  Téglalapok, tehát a test téglatest. Vetítsük a tetraédert és a köré írható téglatestet merőlegesen valamelyik lapjának síkjára! Mivel a szabályos tetraéder szemközti élei merőlegesen egymásra, a téglatest lapjainak átlói is merőlegesen egymásra.  $\Rightarrow$  Minden lapja négyzet, azaz a szabályos tetraéder köré írható paralelepipedon kocka.

**1835.** Mind a nyolc csúcsnál egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alapú tetraédert vágunk le, a magasságuk egyben az élük.  $V_{\text{kocka}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$ . Egy levágott csúcs térfogata:

$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}^3. \quad V = V_{\text{kocka}} - 8V' = 180 \text{ cm}^3.$$

**1836.** Felhasználjuk: A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja  $\Rightarrow S_D C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Pitagorasz-tétel a  $DS_D C$ -re:  $M^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ ;  
 $F = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}$ .

a)  $a = 8,6$  cm;  $V = 53 \cdot \sqrt{2} \approx \underline{74,96 \text{ cm}^3}$ ;  $F = 73,96 \cdot \sqrt{3} \approx \underline{128,1 \text{ cm}^2}$ .

b)  $a = \frac{1}{4}$  cm;  $V = \frac{\sqrt{2}}{768} \approx 0,0018 \text{ m}^3 = \underline{1,8 \text{ dm}^3}$ ;  $F = \frac{\sqrt{3}}{16} \approx 0,108 \text{ m}^2 = \underline{10,8 \text{ dm}^2}$ .

**1837.** A szabályos tetraédert magába foglaló paralelepipedon egy kocka. A tetraéder körülírt gömbjének középpontja a kocka középpontja, sugara a kocka testátlójának fele:  $R = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}$ .

fele:  $R = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}$ .

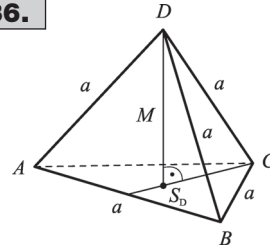
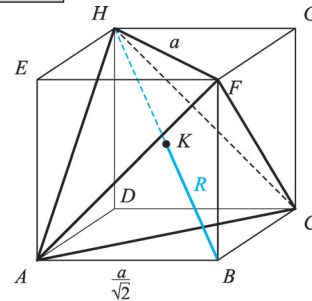
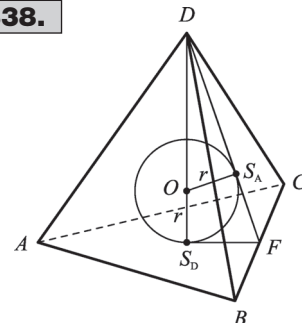
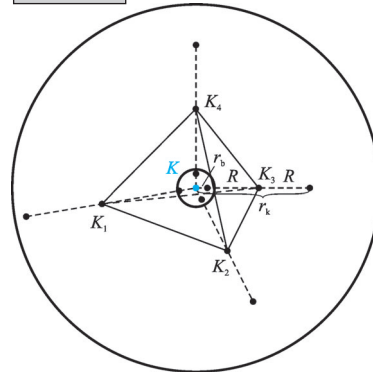
**1838.** A szabályos tetraéder térfogata:  $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$ .

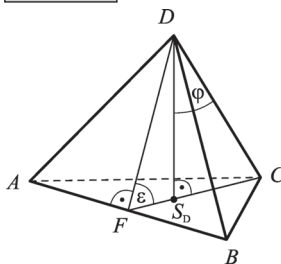
A térfogat másképp:  $V = 4V_{ABCO} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot r = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} r$ . A kettőt összehasonlítva:

$$\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} r \Rightarrow r = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{12}$$

**1839.** Az egymást páronként érintő gömbök középpontjai egy  $2R$  élű szabályos tetraéder négy csúcsában vannak. A belülről, illetve kívülről érintő gömbök koncentrikusak, középpontjuk a tetraéder középpontjával azonos. Az érintkezés feltétele:  $r_b + 2R = r_k$ . A szabályos tetraéder köré írható gömb sugara az 1837. feladat eredményéből  $\frac{2R\sqrt{6}}{4} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$ . Az ábra szerint  $\frac{R\sqrt{6}}{2} = r_b + R \Rightarrow r_b = R \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$  és  $r_k = R \frac{\sqrt{6} + 2}{2}$ . A térfogatok aránya:

$$\frac{V_b}{V_k} = \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} + 2}\right)^3 = \underline{\underline{(5 - 2\sqrt{6})^3}}$$

**1836.****1837.****1838.****1839.**

**1841.**

**1840.** Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder magassága:  $M = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ . Ebből  $a = \frac{3M}{\sqrt{6}} = \frac{M\sqrt{6}}{2}$ .

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6M^2}{4} \cdot M = \frac{M^3 \cdot \sqrt{3}}{8}.$$

**1841.** A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súlypontja  $\Rightarrow S_D C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . A  $DS_D C \Delta$ -ben  $\sin \varphi = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{35,26^\circ}}$ . A  $DS_D$  magasság a  $DB$  és  $AD$  éllel is  $\varphi$  szöveget zár be,  $AB$ ,  $AC$  és  $BC$  élekre pedig merőleges, mert merőleges a síkjukra.

**1842.** Tekintsük az 1841. ábrát. A szabályos tetraéder magasságtalppontja az oldallap súly-

pontja  $\Rightarrow FS_D = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .  $FS_D D$  derékszögű háromszögben:  $\cos \varepsilon = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx \underline{\underline{70,53^\circ}}$ .

**1843.** Az 1836. feladatban láttuk, hogy a szabályos tetraéder térfogata:  $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{30^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$ . Az 1838. feladatban láttuk, hogy a beírt gömb sugara:  $r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{30\sqrt{6}}{12} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ .

Ha a lapokat 3 cm vastagságban csiszolják le, akkor a beírt gömb sugara 3 cm-rel csökken:

$$r' = \left( \frac{5\sqrt{6}}{2} - 3 \right) \text{ cm}; \quad a' = \frac{12r'}{\sqrt{6}} = \frac{12 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} - 36}{\sqrt{6}} = (30 - 6\sqrt{6}) \text{ cm};$$

$$V' = \frac{(30 - 6\sqrt{6})^3 \cdot \sqrt{2}}{12}; \quad \Delta V = \frac{30^3 - (30 - 6\sqrt{6})^3}{12} \cdot \sqrt{2};$$

$$\Delta m = \Delta V \cdot \rho = \frac{30^3 - (30 - 6\sqrt{6})^3}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot 2,8; \quad \Delta m \approx 7726,97 \text{ g} \approx \underline{\underline{7,73 \text{ kg}}}.$$

## Gúla, csonkagúla



## Gúla

**1844.** Az oldallapok területösszege nagyobb, mint az alaplap síkjára eső vetületeik területösszege, hiszen  $t'_i = t_i \cdot \cos \alpha < t_i$  (ahol  $\alpha$  az oldallap és az alaplap szöge). A vetületek területösszege pedig nem kisebb az alaplap területénél.

$t_{\text{alaplap}} \leq t'_1 + t'_2 + \dots + t'_n = t_1 \cdot \cos \alpha_1 + t_2 \cdot \cos \alpha_2 + \dots + t_n \cdot \cos \alpha_n < t_1 + t_2 + \dots + t_n$ . (Az alaplap területe akkor egyenlő a vetületek területének összegével, ha a magasság talppontja az alaplap belső pontja.)

**1845.**  $ATM$  és  $BTM$  derékszögű háromszögben:  $\sin \alpha = \frac{m}{a}$  és  $\sin \beta = \frac{m}{b} \Rightarrow a \cdot \sin \alpha = m = b \cdot \sin \beta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ . A bizonyítás független attól, hogy a  $T$  talppont az alapsokszögnek

belső pontja-e, vagy sem.

**1846.** A szabályos  $n$  oldalú gúla magasságának talppontja az alaplap köré írt kör középpontja.  $PA_i T \Delta$ -ben  $T$ -nél derékszög van, ezért  $PA_i > A_i T$ , azaz  $a_n > R$ . Adott  $R$  esetén  $a_{n+1} < a_n$ , és mivel  $a_6 = R$ , csak  $2 < n < 6$  lehetséges.  $\Rightarrow n \in \{3; 4; 5\}$ .

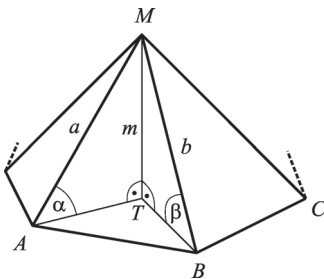
**1847.** Egy síkot párhuzamos síkokkal metszve a metszésvonalak párhuzamosak:  $S' \parallel S \Rightarrow A'B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, \dots$  Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét az  $AMB \times AB$  és  $A'B'$  szelőire:  $A'M : AM = B'M : BM$ ! Hasonlóan a többi lap  $M$ -be futó élére:  $B'M : BM = C'M : CM = D'M : DM = \dots$  Az arányok egyenlőségéből visszajutunk az  $A$  ponthoz. Ez azt jelenti, hogy az  $A'$  pont az  $A$  pont  $M$ -re vonatkozó középpontos hasonló képe,  $B'$  a  $B$  pontnak,  $C'$  a  $C$  pontnak és így tovább.  $\Rightarrow$  Az  $S'$  síkbeli metszet az alapsokszög  $M$  középpontú hasonló képe.

**1848.** Használjuk az 1847. ábra jelöléseit! Az 1847. feladatban láttuk, hogy a gúla alaplappal párhuzamos síkmetszetei hasonlóak az alapsokszöghöz, ezért egymáshoz is. Hasonlóságuk

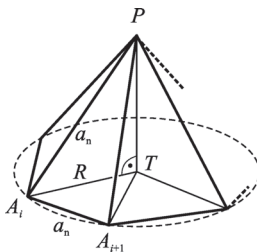
aránya:  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{MB'}{MB} = \frac{MT'}{MT} = \lambda$ , ahol  $T'$ , illetve  $T$  a síkokra az  $M$  csúcsból állított merőlege-

sek talppontjai.  $\Rightarrow \frac{t_{A'B'C'D'...}}{t_{ABCD...}} = \lambda^2 = \left( \frac{MT'}{MT} \right)^2 = \frac{(MT')^2}{MT^2}$ .

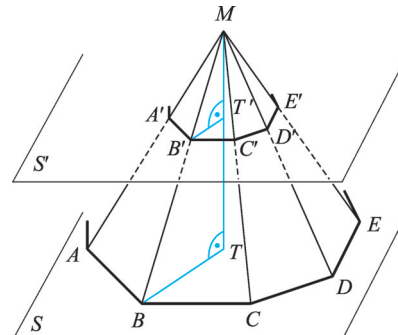
1845.



1846.

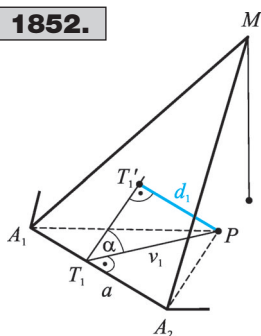


1847.



II

1852.



**1849.** Legyen az alaplapok területe  $t_1$  és  $t_2$ , a síkmetszetek területe  $t'_1$  és  $t'_2$ ! Az 1848. feladatban láttuk, hogy  $\frac{t'_1}{t_1} = \left(\frac{M_1 T'_1}{M_1 T_1}\right)^2$

és  $\frac{t'_2}{t_2} = \left(\frac{M_2 T'_2}{M_2 T_2}\right)^2$ . A feltételek szerint  $t_1 = t_2$ ,  $M_1 T_1 = M_2 T_2$ ,

$$\begin{aligned} T_1 T'_1 &= T_2 T'_2, \text{ ezért } M_1 T'_1 = M_2 T'_2. \Rightarrow t'_1 = t_1 \cdot \left(\frac{M_1 T'_1}{M_1 T_1}\right)^2 = \\ &= t_2 \cdot \left(\frac{M_2 T'_2}{M_2 T_2}\right)^2 = t'_2. \end{aligned}$$

**1850.** Legyen a gúla magassága  $m$ , a csúcshoz közelebbi síkmetszet területe  $t'$ , a távolabbié  $t''$ !

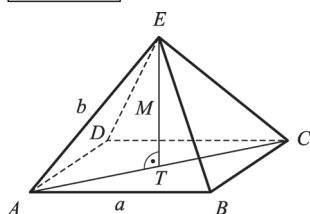
Az 1848. feladat alapján  $t'' : t' : t = \left(\frac{m}{3}\right)^2 : \left(\frac{2m}{3}\right)^2 : m^2 = \frac{1}{9} : \frac{4}{9} : 1$ .  $\frac{t''}{t} = \frac{1}{9} \Rightarrow t'' = \frac{1}{9} \cdot 900 =$   
 $= \underline{\underline{100 \text{ cm}^2}}$ ;  $\frac{t'}{t} = \frac{4}{9} \Rightarrow t' = \frac{4}{9} \cdot 900 = \underline{\underline{400 \text{ cm}^2}}$ .

**1851.** Az 1848. feladat szerint  $\frac{t'}{t} = \left(\frac{m'}{m}\right)^2 \Rightarrow m' = \sqrt{\frac{t'}{t}} m = \sqrt{\frac{t'}{t}} \cdot m$ , ahol  $m'$  a csúcs és a metsző sík távolsága. a)  $t' = \frac{1}{2} t \Rightarrow m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{30\sqrt{2} \text{ cm}}}$ . b)  $t' = \frac{1}{3} t \Rightarrow m' = \frac{m}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{20\sqrt{3} \text{ cm}}}$ .

**1852.** A szabályos gúla minden oldalpja ugyanakkora  $\alpha$  szöget zár be az alaplappal. Egy oldallaptól mért távolság  $d_1 = v_1 \cdot \sin \alpha$  ( $T_1 P T'_1$  derékszögű háromszög). Az oldallapoktól mért távolságok összege, felhasználva, hogy  $t_{A_i A_{i+1} P} = t_i = \frac{a \cdot v_i}{2}$  a következő:  $d_1 + d_2 + \dots + d_n =$   
 $= v_1 \cdot \sin \alpha + v_2 \cdot \sin \alpha + \dots + v_n \cdot \sin \alpha = \sin \alpha \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \sin \alpha \cdot \left(\frac{2t_1}{a} + \frac{2t_2}{a} + \dots + \frac{2t_n}{a}\right) =$   
 $= \frac{2 \sin \alpha}{a} (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{2t_{\text{alap}} \cdot \sin \alpha}{a} = \text{állandó.}$

**1853.** Tekintsük az 1841. ábrát! A magasság talppontja az  $ABC \triangle S_D$  súlypontja, ezért  $FS_D = \frac{1}{3} FC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Pitagorasz tétele az  $FS_D D \triangle$ -re:  $m_a^2 = m^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{12}$ .

1854.



Pitagorasz tétele az  $AFD \triangle$ -re:  $b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{a^2}{12} +$   
 $+ \frac{a^2}{4} = m^2 + \frac{a^2}{3}$ . Az oldalél:  $b = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{3}}$ .

**1854.**  $AC$  az  $ABCD$  négyzet átlója, ezért  $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ .  $ATE$  derékszögű háromszögre Pitagorasz tétele:

$$b^2 = AT^2 + M^2 \Rightarrow AT = \sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow AC = 2AT = 2\sqrt{b^2 - M^2} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{b^2 - M^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot (b^2 - M^2)}$$

az alapél.

**1855.** Tekintsük az 1841. ábrát. A magasság talppontja az  $ABC\Delta$   $S_D$  súlypontja, ezért

$$FS_D = \frac{1}{3} FC = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Pitagorasz tétele az } AFD\Delta\text{-}$$

$$\text{re: } b^2 = FD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow FD = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}. \text{ Pitagorasz tétele az}$$

$$FS_D D\Delta\text{-re: } DS_D^2 = DF^2 - FS_D^2 = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{12} = b^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DS_D = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} \approx \underline{\underline{19,61 \text{ cm}}}.$$

**1856.** Az alaplap szabályos hatszög, ezért  $ABK\Delta$  szabályos.

$\Rightarrow KB = a$ . Pitagorasz tétele a  $CKB$  derékszögű háromszögre:

$$a^2 = o^2 - M^2 \Rightarrow a = \sqrt{205} \approx \underline{\underline{14,32 \text{ cm}}}.$$

**1857.**  $KFC$  derékszögű háromszögben  $KF = a : 2 = 11$  cm;

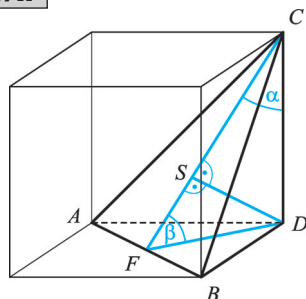
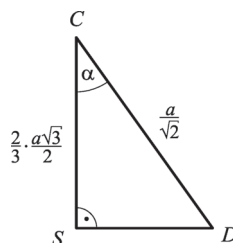
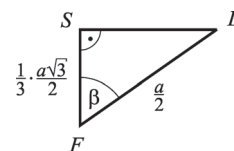
$$\alpha = 63,6^\circ; \cos \alpha = \frac{11}{m} \Rightarrow m \approx 24,74 \text{ cm}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{M}{11} \Rightarrow M \approx$$

$$\approx \underline{\underline{22,16 \text{ cm}}}. \quad ABC\Delta \text{ egyenlő szárú} \Rightarrow F \text{ felezéspont esetén}$$

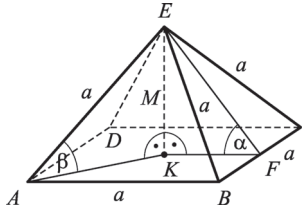
$$AFC\Delta \text{ derékszögű. Pitagorasz tétele szerint: } o^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow o \approx \underline{\underline{27,07 \text{ cm}}}.$$

**1858.** Döntsük a gúlát az egyik oldalapjára! Ágyazzuk be a testet egy kockába! Ha az alapélék  $a$  hosszúságúak, akkor az oldalélék (egyben a kocka élei)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  hosszúságúak. A  $D$  csúcsnak az alapra vetett merőleges vetülete az  $a$  oldalú szabályos háromszög  $S$  súlypontja. Az oldalél és az alaplap szöge a  $DSC$  derékszögű háromszögből számolható:  $\cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a}{\sqrt{2}} =$

**1858/I.****1858/II.****1858/III.**

1859.



$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha \approx \underline{35,26^\circ}. \text{ Az oldallap és az alaplap szöge a } DSF \text{ derékszögű háromszögből számolható: } \cos \beta = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta \approx \underline{54,74^\circ}. DS \text{ testmagasság az } FSD\Delta\text{-re felírt Pitagorasz-tételből: } M^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

**1859.** a) Pitagorasz tétele a  $KFE$  derékszögű háromszögre, ahol  $KF = \frac{a}{2}$ ;  $EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $KE = M$ .

$$M^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b) oldallap és alaplap szöge  $KFE$  derékszögű háromszögben:  $\cos \alpha = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \approx \underline{54,73^\circ}$ .

c) oldalél és alaplap szöge az  $AKE$  derékszögű háromszögben:  $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $EK = M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$  a háromszög egyenlő szárú  $\Rightarrow \beta = \underline{45^\circ}$ .

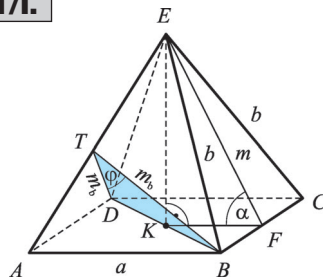
**1860.** Tekintsük az 1841 ábrát! A  $D$  pont  $[ABC]$  síkra vetett merőleges vetülete az  $ABC\Delta$  súlypontja, ezért a  $BCD\Delta$  alapsíkra vetett merőleges vetülete a  $BCS_D\Delta$ . Jelöljük az alaplap területét  $t$ -vel!  $t_{S_D,BC} = \frac{t}{3}$  a súlypont tulajdonsága miatt,  $t_{BCD} = \frac{2t}{3}$  a feltétel miatt. A vetület

területe az eredeti terület  $\cos \varepsilon$ -szorosa, azaz  $\frac{t}{3} = \frac{2t}{3} \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow \cos \varepsilon = 0,5 \Rightarrow \varepsilon = \underline{60^\circ}$ .

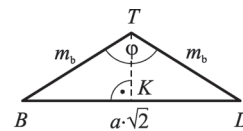
**1861.** A gúla felszíne:  $A = a^2 + 2am$ . A feltétel szerint  $A : a^2 = 2,56$ , azaz  $(a^2 + 2am) : a^2 = 2,56 \Rightarrow \frac{m}{a} = 0,78$ . Használjuk az 1861/I. ábra jelöléseit!

a)  $KEF$  derékszögű háromszögből:  $\cos \alpha = \frac{a}{2} : m = \frac{a}{2m} = 0,641 \Rightarrow \alpha \approx \underline{50,13^\circ}$  az oldallap és az alaplap szöge.

1861/I.



1861/II.



b)  $EBC$  oldallap területe kétféleképpen:  $\frac{am}{2} = \frac{bm_b}{2} \Rightarrow$

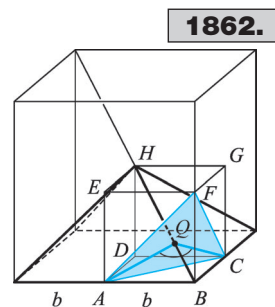
$$\Rightarrow \frac{am}{b} = m_b. \text{ Vegyük a } BDT \text{ síkmetszetet! } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : m_b = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{am}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{m}.$$

Az  $EFB$  derékszögű háromszögre írt Pitagorasz-tételből:

$$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{m^2} = 1 + \frac{a^2}{4m^2} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 0,78^2} \Rightarrow \frac{b}{m} = 1,18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = 0,8399 \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{114,26^\circ}}.$$

**1862.** Legyen a gúla alapéle  $2b$ ! Helyezzük rá egy  $2b$  élű kocka alaplapjára a gúlát! Tekintsük a kockának az 1862. ábrán látható  $ABCDEFGH$  részét, ami egy  $b$  élű kocka! A  $BH$  testátló merőleges az  $[ACF]$  síkra, és azt az  $ACF\Delta Q$  súlypontjában metszi.  $\Rightarrow AQC\hat{=} = 120^\circ \Rightarrow AH$  pont a gúla csúcsa.  $\Rightarrow$  A gúla magassága  $b = 16$  cm.



1862.

**1863.** Az 1863. ábra szerint az  $FC$  oldalél szögét keressük a különböző alapélekkel.

**1. eset:**  $BC$  és  $DC$  alapélekkel:  $\underline{60^\circ}$ .

**2. eset:**  $AB$  és  $ED$  alapélekkel ugyanakkora szöget zár be. Felhasználjuk, hogy szabályos ötszögben az  $ED$  oldal párhuzamos az  $AC$  átlóval,  $AB$  oldal pedig párhuzamos az  $EC$  átlóval.  $AB$  és  $FC$  kitérő egyenesek szöge egyenlő az  $EC$  és  $FC$  metsző egyenesek szögével. Vegyük az  $ECF$  síkmetszetet, ami egy egyenlő szárú háromszög, alapja az  $EC$  átló, szárjai az  $EF$  és  $FC$  egyenlő élek! Ez a háromszög egybevágó az  $ECD\Delta$ -gel, mert  $EC$  oldaluk közös, másik két oldaluk pedig  $a$  hosszúságú.  $EDC\hat{=} = 108^\circ \Rightarrow ECD\hat{=} = DEC\hat{=} = 36^\circ \Rightarrow \hat{=} (AB; FC) = \hat{=} (ED; FC) = \underline{36^\circ}$ .

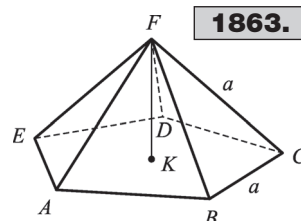
**3. eset:**  $EA$  alapélel. Vegyük a gúla  $[FKC]$  síkkal való tengelymetszetét!  $FK$  merőleges az alapsíkra, ezért merőleges annak minden egyenesére.  $\Rightarrow FK \perp EA$ .

$KC$  egyenes az ötszög szimmetriatengelye, ezért  $KC \perp EA$ . Az aláhúzottakból következik, hogy  $EA \perp [FKC] \Rightarrow EA$  merőleges  $[FKC]$  minden egyenesére  $\Rightarrow EA \perp FC$ , tehát  $EA$  és  $FC$  élek szöge  $\underline{90^\circ}$ .

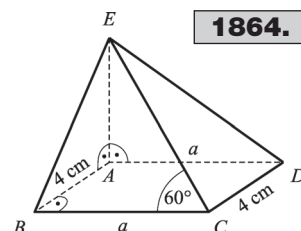
**1864.**  $EBC\Delta$  derékszögű, mert  $BC \perp AB$  ( $ABCD$  téglalap),  $EA \perp [ABCD] \Rightarrow EA \perp BC$ . Az aláhúzottakból következik, hogy  $BC \perp [EAB] \Rightarrow BC \perp EB$ .  $EBC\Delta$ -ben  $60^\circ$  és  $30^\circ$  a hegyesszögek  $\Rightarrow EC = 2BC = 2a$  és  $EB = \sqrt{3} \cdot a$ ;  $AD = AE$  feltétel miatt  $M = a$ . Pitagorasz tétele az  $ABE$  derékszögű háromszögre:  $EB^2 = AB^2 + AE^2$ , azaz  $3a^2 = 4^2 + a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow M = \underline{2\sqrt{2}}$  cm.

**1865.** A síkmetszet az  $ACGF$  húrtrapéz.  $FG$  középvonala az  $EDS\Delta$ -nek, ezért  $FG = \frac{a}{2}$ .  $CG$  a  $CDS\Delta$  súlyvonala, ezért  $CH : HD = 3 : 1$ . Pitagorasz tételét alkalmazva  $GHD$ , majd  $GHC$

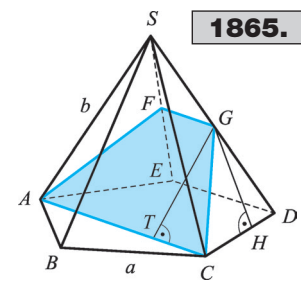
derékszögű háromszögben:  $GH^2 = GD^2 - HD^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$  és



1863.



1864.



1865.

II



$GC^2 = GH^2 + HC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{b^2 + 2a^2}{4}$ .  $AC$  egy  $a$  oldalú szabályos ötszög átlója,

ezért  $AC = \frac{(1 + \sqrt{5})a}{2}$ .  $ACGF$  húrtrapézban  $TC = \frac{AC - FG}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$ .  $GTC$  derékszögű

háromszögben Pitagorasz tétele:  $GT^2 = GC^2 - CT^2 = \frac{4b^2 + 3a^2}{16}$ .

$t_{ACGF} = \frac{(AC + FG) \cdot GT}{2} = \frac{(2 + \sqrt{5}) \cdot a \cdot \sqrt{4b^2 + 3a^2}}{16}$  a síkmetszet területe.

**1866.** a)  $A \approx \underline{618 \text{ cm}^2}$ . b)  $A \approx \underline{409,54 \text{ cm}^2}$ . c)  $A \approx \underline{845,46 \text{ cm}^2}$ . d)  $A \approx \underline{1625,5 \text{ cm}^2}$ .

**1867.**  $35,17 \text{ m}^2$  ónlemez szükséges.

**1868.** a)  $V \approx \underline{26,97 \text{ dm}^3}$ . b)  $V \approx \underline{321,9 \text{ dm}^3}$ . c)  $V \approx \underline{0,101 \text{ m}^3}$ .

d) Tekintsük az 1854. ábrát. Legyen  $a = 56 \text{ cm}$ ,  $b = 78 \text{ cm}$ ! Pitagorasz tétele a  $TEC\Delta$ -re, ahol  $TC = \frac{56 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow M^2 = 78^2 - \left(\frac{56 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 67,2 \text{ cm}$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot 56^2 \cdot 67,2 = 70\,248 \text{ cm}^3 = \underline{70,248 \text{ dm}^3}$ .

e) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen  $a = 5,9 \text{ cm}$ ,  $o = 12,3 \text{ cm}$ !  $KAB\Delta$  szabályos, ezért  $KB = 5,9 \text{ cm}$ . Pitagorasz tétele a  $CKB\Delta$ -re:  $M^2 = 12,3^2 - 5,9^2 \Rightarrow M \approx 10,8 \text{ cm}$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5,9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 10,8 = \underline{325,36 \text{ cm}^3}$ .

**1869.** Tekintsük az 1854. ábrát, legyen  $AC = e$  és  $b = a$ !  $e = 6 \text{ cm} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ .

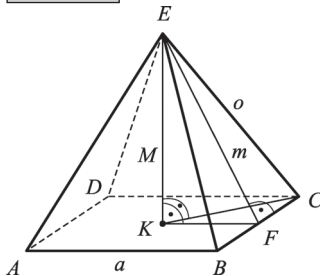
Pitagorasz tétele az  $ETC\Delta$ -re:  $M^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 \Rightarrow M = 3 \text{ cm}$ .  $V = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 3 = \underline{18 \text{ cm}^3}$  és

$$A = (3\sqrt{2})^2 + 4 \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \underline{18(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2}$$

**1870.** Tekintsük az 1812. ábrát, legyen  $x = 32 \text{ cm}$ ,  $y = 12 \text{ cm}$ ,  $z = 18 \text{ cm}$ !

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 18}{2} \cdot 32 = \underline{1152 \text{ cm}^3}$ . Pitagorasz tétele az  $ABD$ ,  $BCD$ , illetve  $CDA$  derékszögű háromszögekre:  $AB^2 = 12^2 + 18^2 \Rightarrow AB = 6 \cdot \sqrt{13} \approx 21,63 \text{ cm}$ .  $BC^2 = 18^2 + 32^2 \Rightarrow BC \approx 36,72 \text{ cm}$ .  $AC^2 = 12^2 + 32^2 \Rightarrow AC \approx 34,18 \text{ cm}$ .  $ABC\Delta$ -ben  $s = 46,3 \text{ cm}$ , ezért a Heron-képlet felhasználásával

**1871.**



$$t_{ABC\Delta} = 364,17 \text{ cm}^2 \Rightarrow A = \frac{12 \cdot 18}{2} + \frac{18 \cdot 32}{2} + \frac{32 \cdot 12}{2} + t_{ABC} = \underline{952,17 \text{ cm}^2}$$

**1871.** A feltétel szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amiknek a szárszöge  $45^\circ$ , alapja  $8 \text{ cm}$ . Az oldallapok magasságára:  $\text{tg } 22,5^\circ = \frac{4}{m} \Rightarrow m \approx 9,66 \text{ m}$ . Pitagorasz tétele a  $KFE\Delta$ -re (1871. ábra):  $M^2 = 9,66^2 - 4^2 \Rightarrow M = 8,79 \text{ cm}$ .  $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 8,79 \approx \underline{187,5 \text{ cm}^3}$ .

**1872.** a) Tekintsük az 1871. ábrát, legyen  $a = 7$  cm!

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} \Rightarrow m = \frac{A - a^2}{2a} = 15,93 \text{ cm. Pitagorasz tétele a } KFE$$

$$\text{derékszögű háromszögre: } m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{4}} = 15,54 \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 M \approx \underline{\underline{253,8 \text{ cm}^3}}.$$

b) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen  $a = 5,5$  cm!

$$A = 6 \cdot \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{am}{2} \right) \Rightarrow m = \frac{A - \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}}{3a} = 1172 \text{ cm. } ABK\Delta \text{ szabá-}$$

$$\text{lyos, ezért } KF = \frac{5,5 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm. Pitagorasz tétele a } KFC \text{ derékszögű háromszögre: } m^2 = M^2 + KF^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{m^2 - KF^2} = 10,71 \text{ cm. } V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} M = \underline{\underline{280,58 \text{ cm}^3}}.$$

c) Tekintsük az 1872. ábrát!  $ABK\Delta$  egyenlő szárú, szárszöge  $45^\circ$ , ezért  $\text{tg} \frac{45^\circ}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{2 \text{tg} 22,5^\circ} \Rightarrow x = 5,67 \text{ cm} \Rightarrow t_{\text{aláp}} = 8 \cdot \frac{4,7 \cdot 5,67}{2} = 106,56 \text{ cm}^2, \text{ valamint } A = t_{\text{aláp}} + 8 \cdot t_{\text{oldallap}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 272 = 106,56 + 8 \cdot \frac{4,7m}{2} \Rightarrow m = 8,79 \text{ cm. Pitagorasz tétele a } KFC \text{ derékszögű háromszögre:}$$

$$m^2 = M^2 + x^2 \Rightarrow M = \sqrt{m^2 - x^2} = 6,72 \text{ cm. } V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{aláp}} \cdot M \approx \underline{\underline{238,9 \text{ cm}^3}}.$$

**1873.** a) Tekintsük az 1871. ábrát, legyen  $a = 6,3$  cm!  $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 M \Rightarrow M = 3V : a^2 = 40,34$  cm.

$$\text{Pitagorasz tétele az } EKC \text{ derékszögű háromszögre, melyben } KC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow o^2 = M^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow o = \underline{\underline{40,58 \text{ cm}}}.$$

b) Tekintsük az 1873. ábrát!  $ABK$  olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge  $72^\circ$ , ezért

$$\text{tg } 36^\circ = \frac{3,9}{x} \Rightarrow x = \frac{3,9}{\text{tg} 36^\circ} = 5,37 \text{ cm. } V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{aláp}} \cdot M = \frac{5 \cdot \frac{ax}{2} \cdot M}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 15,3 \text{ cm; } ABK\Delta\text{-ból } KB = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = 6,64 \text{ cm. Pitagorasz}$$

$$\text{tétele a } KBC \text{ derékszögű háromszögre: } o^2 = 15,3^2 + 6,64^2 \Rightarrow$$

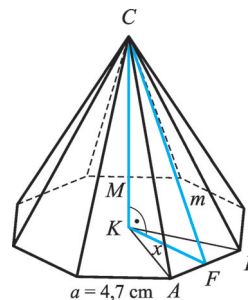
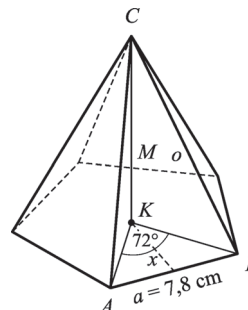
$$\Rightarrow o = \underline{\underline{16,68 \text{ cm}}}.$$

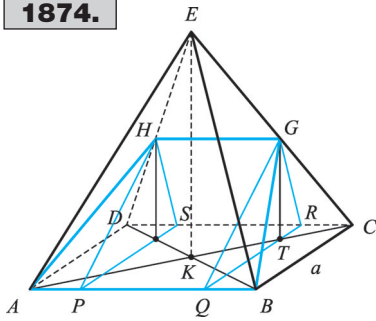
c) Tekintsük az 1856. ábrát, legyen  $a = 5,9$  cm!  $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot M \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \frac{2V}{a^2 \sqrt{3}} \approx 17,7 \text{ cm; } ABK\Delta \text{ szabályos, ezért } KB = a = 5,9 \text{ cm.}$$

$$\text{Pitagorasz tétele a } KBC \text{ derékszögű háromszögre: } o^2 = M^2 + a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow o = \underline{\underline{18,66 \text{ cm}}}.$$

**1872.****1873.**

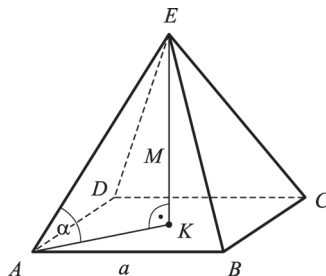
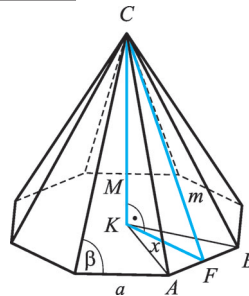
**1874.**

$= \frac{(a-GH)am}{6}$ . Az E középpontú hasonlóság alapján:  $\frac{GH}{DC} = \frac{EK-GT}{EK} \Rightarrow \frac{GH}{a} = \frac{M-m}{M} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow GH = \frac{(M-m)a}{M}$ .  $V_1 + 2V_2 = 0,5V \Rightarrow \frac{am}{2} \cdot \frac{(M-m)a}{M} + 2 \cdot \frac{\left(a - \frac{(M-m)a}{M}\right) \cdot am}{6} = \frac{a^2M}{6} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow m^2 - 3mM + M^2 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}M > M$ , ez nem lehet.  $m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}M$  a keresett távolság.

**1875.** Az 1875. ábra jelölései szerint:  $\alpha = 72^\circ 28'$ ,  $a = 2,56$  m.  $\triangle AKE$  derékszögű háromszögben  $AK = \frac{2,56 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1,81$  m és  $\operatorname{tg} 72^\circ 28' = \frac{M}{1,81} \Rightarrow M = 5,74$  m.  $V = \frac{1}{3} a^2 M = \underline{\underline{12,54 \text{ m}^3}}$ .

**1876.** Tekintsük az 1812. ábrát, legyen  $a = b = c = 2,54$  cm,  $x = y = z$ ! Döntsük a gúlát az egyik oldalapjára! Az oldalapok olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amiknek 2,54 cm az átfogója.  $\Rightarrow o = \frac{2,54}{\sqrt{2}}$ .  $A = \frac{2,54^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{2,54^2}{4} \approx \underline{\underline{7,63 \text{ cm}^2}}$  és  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{o^2}{2} \cdot o = \frac{o^3}{6} \approx \underline{\underline{0,97 \text{ cm}^3}}$ .

**1877.** Tekintsük az 1877. ábrát, legyen  $a = 4$  dm,  $\beta = 75^\circ$ !  $\triangle KAB$  olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge  $45^\circ$ , ezért  $\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \frac{a}{2x} \Rightarrow x = \frac{4}{2 \operatorname{tg} 22,5^\circ} = 4,83$  dm  $\Rightarrow t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{ax}{2} =$

**1875.****1877.**

$= 77,25 \text{ dm}^2$ .  $ABC$  olyan egyenlő szárú háromszög, aminek alapon fekvő szöge  $75^\circ$ , ezért  $\text{tg } 75^\circ = \frac{2m}{a} \Rightarrow m = \frac{4\text{tg } 75^\circ}{2} = 7,46 \text{ dm} \Rightarrow t_{\text{oldallap}} = \frac{am}{2} = 14,92 \text{ dm}^2$ .

$A = t_{\text{alap}} + 8t_{\text{oldallap}} = 196,68 \text{ dm}^2$ . Pitagorasz tétele a  $KFC$  derékszögű háromszögre:  $M^2 + x^2 = m^2 \Rightarrow M = 5,68 \text{ dm}$ ;  $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = 146,4 \text{ m}^3$ .

**1878.** Tekintsük az 1877. ábrát!  $M = 37,65 \text{ m}$ ;  $KA = r = 3,15 \text{ m}$ .  $KAB$  olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge  $45^\circ$ , ezért  $t_{\text{alap}} = 8 \cdot \frac{r^2 \sin 45^\circ}{2} = 28,06 \text{ m}^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} t_{\text{alap}} \cdot M = 352,2 \text{ m}^3$ .

**1879.** Tekintsük az 1879. ábrát!  $A_1A_2 = 1,9 \text{ cm}$ ;  $KFC \sphericalangle = 87^\circ 11'$ . Az alaplap a köré írható kör középpontjából a csúcsokhoz vezető sugarakkal 24 db olyan egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek szárszöge  $15^\circ$ .  $KFA_2$  derékszögű háromszögből:  $\text{tg } 7,5^\circ = \frac{1,9}{2KF} \Rightarrow KF = 7,21 \text{ cm}$ .  $CKF$  derékszögű háromszögből:  $\text{tg } 87^\circ 11' = \frac{M}{7,21} \Rightarrow M = 146,54 \text{ cm}$ .  $t_{\text{alap}} = 24 \cdot \frac{1,9 \cdot 7,21}{2} = 164,39 \text{ cm}^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \approx 8029,8 \text{ cm}^3 \approx 8,03 \text{ dm}^3$ .

**1880.** Használjuk az 1871. ábra jelöléseit!  $V = 864 \text{ cm}^3$ ;  $a : M = 2 : 3$ , ezért  $a = \frac{2}{3} M$ ;  $V = \frac{1}{3} a^2 M = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} M^3 = \frac{4}{27} M^3 \Rightarrow 864 = \frac{4}{27} M^3 \Rightarrow M = 18 \text{ cm} \Rightarrow a = 12 \text{ cm}$ . Pitagorasz tétele a  $CKF$  derékszögű háromszögre:  $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow m = 6\sqrt{10} \approx 18,97 \text{ cm}$ ;

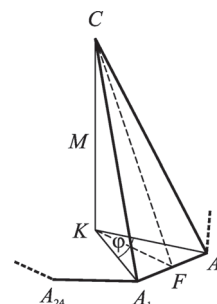
$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} = 144 + 144 \sqrt{10} = 144(1 + \sqrt{10}) \text{ cm}^2 \approx 599,37 \text{ cm}^2$ .

**1881.** Az 1871. ábra jelöléseivel:  $M = 2\sqrt{2} \cdot a \Rightarrow V = \frac{1}{3} a^2 \cdot M = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\sqrt{2}}} = 3,75 \text{ m} \Rightarrow M = 10,62 \text{ m}$ . Pitagorasz tétele a  $KFE\Delta$ -re:  $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow m = 10,78 \text{ m}$ ;

$A = a^2 + 4 \cdot \frac{am}{2} = 94,94 \text{ m}^2$ .

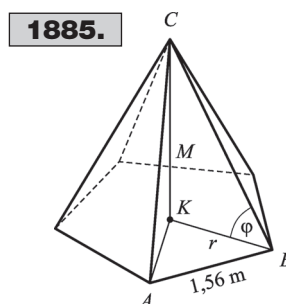
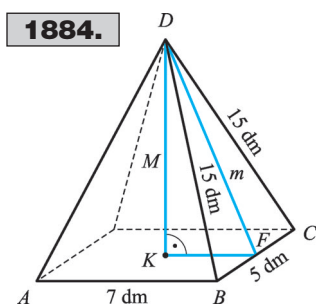
**1882.** Az 1871. ábra jelöléseivel: Az oldallapok szabályos háromszögek, ezért  $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Pitagorasz tétele a  $KFC$  derékszögű háromszögre:  $m^2 = M^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;

$V = \frac{1}{3} a^2 M = \frac{1}{6} a^3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2}}} \approx 6 \text{ cm}$ .

**1879.**

II

II



**1883.** Használjuk az 1875. ábra jelöléseit, legyen  $\alpha = 46^\circ 20'$ ,  $V = 4,86 \text{ cm}^3$ !  $AKE$  derékszögű háromszögben  $AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $\text{tg } \alpha = \text{tg } 46^\circ 20' = \frac{2M}{a\sqrt{2}} \Rightarrow M = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{tg } 46^\circ 20'$ ;  $V = \frac{1}{3} a^2 M = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a^3 \cdot \text{tg } 46^\circ 20' \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2} \text{tg } 46^\circ 20'}} \approx \underline{\underline{2,7 \text{ m}}}$ .

**1884.** Pitagorasz tétele a  $DFC$  derékszögű háromszögre:  $m^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 15^2 \Rightarrow m^2 = \frac{875}{4} \text{ dm}^2$ .

Pitagorasz tétele a  $KFD$  derékszögű háromszögre:  $M^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{875}{4} \Rightarrow M = 14,37 \text{ dm}$ ;

$V = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 14,37 \approx \underline{\underline{167,65 \text{ dm}^3}}$ .

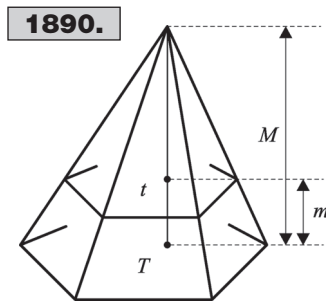
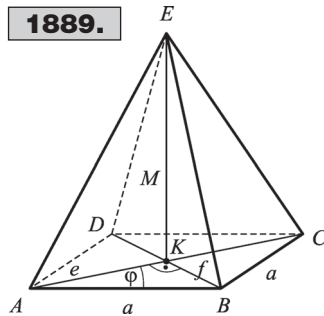
**1885.**  $KAB$  olyan egyenlő szárú háromszög, aminek szárszöge  $72^\circ \Rightarrow \sin 36^\circ = \frac{1,56}{2r} \Rightarrow r \approx 1,33 \text{ cm}$ .  $CKB$  derékszögű háromszögben:  $\text{tg } \varphi = \text{tg } 72^\circ 45' = \frac{M}{1,33} \Rightarrow M = 4,27 \text{ cm}$ ;

$V = t_{\text{alap}} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1,33 \cdot \sin 72^\circ}{2} \cdot 4,27 \approx 5,99 \text{ cm}^3 \Rightarrow m = \rho \cdot V = 7,2 \cdot 5,99 \approx \underline{\underline{43,1 \text{ g}}}$ .

**1886.** Az 1871. ábra jelöléseit használva:  $t_{\text{alap}} = a^2 = 1024 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = 32 \text{ cm} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M = \underline{\underline{16,47 \text{ cm}}}$ . Pitagorasz tétele a  $KFE$  derékszögű háromszögre:  $m^2 = 16^2 + 16,47^2 \Rightarrow m = 22,96 \text{ cm} \Rightarrow t_{\text{palást}} = 4 \cdot \frac{am}{2} \approx 1469,58 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{14,7 \text{ dm}^2}}$ .

**1887.** Az 1871. ábra jelöléseit használva:  $a = 45 \text{ cm} = 4,5 \text{ dm}$ .  $V = \text{tömeg} : \text{sűrűség} = 134,96 \text{ dm}^3$ ;  $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \Rightarrow 134,96 = V = \frac{1}{3} \cdot 4,5^2 \cdot M \Rightarrow M \approx \underline{\underline{20 \text{ dm}}}$ .

**1888.** Tekintsük az 1856. ábrát, legyen  $a = 4,5 \text{ cm}$ ,  $m = 9 \text{ cm}$ !  $ABK\Delta$  szabályos, ezért  $KF = \frac{4,5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$ . Pitagorasz tétele a  $KFC$  derékszögű háromszögre:  $9^2 = M^2 + \left(\frac{4,5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow M \approx 8,11 \text{ cm}$ ;  $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4,5 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 8,11 \approx \underline{\underline{142,27 \text{ cm}^3}}$ .



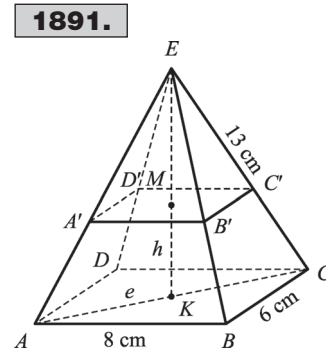
**1889.**  $M = 9$  cm;  $V = 62,52$  cm<sup>3</sup>;  $t_{ACE} = 36,7$  cm<sup>2</sup>.  $V = \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot M \Rightarrow t_{\text{alap}} = \frac{3V}{M} = 20,84$  cm<sup>2</sup>;  
 $t_{ACE} = \frac{e \cdot M}{2} \Rightarrow e = \frac{2t_{ACE}}{M} = 8,16$  cm;  $t_{\text{alap}} = \frac{e \cdot f}{2} \Rightarrow f = \frac{2t_{\text{alap}}}{e} = 5,11$  cm.  $ABK$  derékszögű háromszögben  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{2} : \frac{e}{2} = \frac{f}{e} = 0,6263 \Rightarrow \varphi = 32^\circ \Rightarrow$  Az alaplap egyik szöge  $64^\circ$ . Pitagorasz tétele az  $ABK\Delta$ -re:  $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \underline{4,81}$  cm.

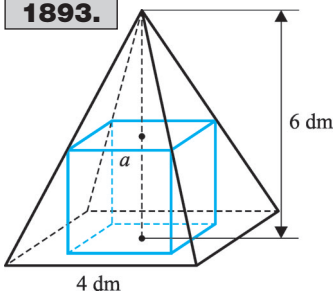
**1890.**  $M = 14$  cm;  $m = 4,2$  cm;  $t = 60$  cm<sup>2</sup>. Az alappal párhuzamos sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából.  $\lambda = \frac{M-m}{M} = 1 - \frac{m}{M} = 1 - \frac{4,2}{14} = \frac{7}{10}$ . A levágott gúla térfogata:  $V' = \frac{1}{3} t(M-m) = 196$  cm<sup>3</sup>. Hasonló testek térfogatának aránya:  $\frac{V'}{V} = \lambda^3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow V = \frac{V'}{\lambda^3} \Rightarrow V = \frac{196 \cdot 10^3}{7^3} = \frac{4}{7} \cdot 10^3 \approx \underline{571,43}$  cm<sup>3</sup>.

**1891.** Az alaplap átlója az  $ABC$  derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével:  $e^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow e = 10$  cm. Pitagorasz tétele a  $KCE$  derékszögű háromszögre:  $M^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow M = 12$  cm. Az  $A'B'C'D'$  sík egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le a gúlából. A két gúla térfogatának aránya:  $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ , másrészt  $\lambda = \frac{M-h}{M} = 1 - \frac{h}{M}$ . A kettőt összevetve:  $1 - \frac{h}{12} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow h = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$  cm  $\approx 2,48$  cm.

**1892.** A csúshoz közelebbi sík egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya:  $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3} = \lambda_1^3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow \frac{m_1}{M} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow m_1 = \frac{45}{\sqrt[3]{3}} \approx \underline{31,2}$  cm.

A csúcstól távolabbi sík is egy olyan gúlát metsz le, amely hasonló az eredeti gúlához. Térfogatuk aránya:  $\frac{V_2}{V} = \frac{2}{3} = \lambda_2^3 \Rightarrow \lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{m'_2}{M} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Rightarrow m'_2 = 45 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 39,31$  cm.



**1893.**

A csúcstól számított második test magassága:  $m_2 = m'_2 - m_1 \approx \underline{\underline{8,11 \text{ cm}}}$ . A csúcstól számított harmadik test magassága:  $m_3 = M - m'_2 \approx \underline{\underline{5,69 \text{ cm}}}$ .

**1893.** A kocka fedőlapjának síkja egy, az eredetivel hasonló gúlát metsz le. A lemetszett gúla magassága  $m = 6 - a$ , alap-éle  $a$ . A hasonlóság aránya:  $\lambda = \frac{a}{4}$ , másrészt  $\lambda = \frac{6-a}{6} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{6-a}{6} \Rightarrow a = 2,4 \text{ dm} \Rightarrow V = a^3 = \underline{\underline{13,824 \text{ dm}^3}}$ .

### Csonkagúla

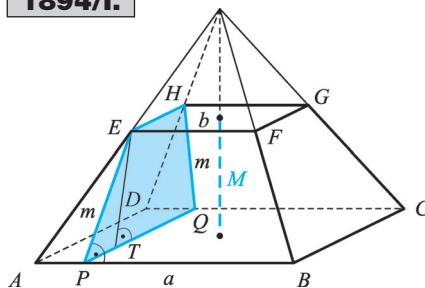
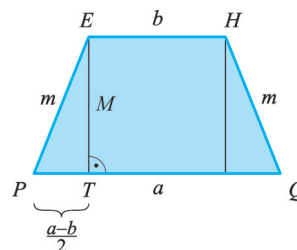
**1894.** Legyen  $PQHE$  a csonkagúla alapsíkra merőleges metszete.  $\Rightarrow EP \perp AB \Rightarrow EP = m$  az  $ABFE$  oldallap magassága. A feltétel szerint:  $a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m \Rightarrow m = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)}$ .

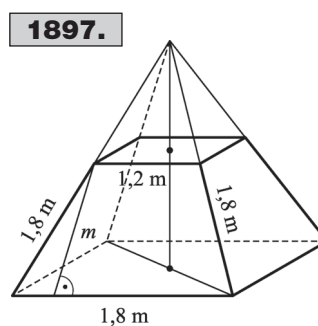
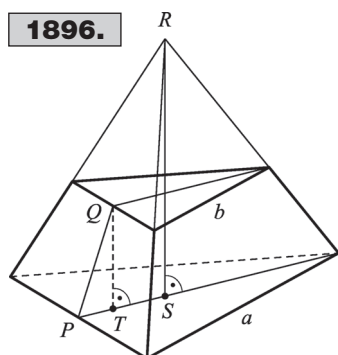
Pitagorasz tétele a  $PTE\Delta$ -re:  $M^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = m^2$ , azaz  $M^2 + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M^2 &= \frac{(a^2 + b^2)^2}{4(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)^2}{4(a+b)^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a-b)^2}{4(a+b)^2} = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - a^2 + b^2)}{4(a+b)^2} = \frac{2a^2 \cdot 2b^2}{4(a+b)^2} \Rightarrow M = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

**1895.** Az 1894/I. ábra jelöléseivel:  $M = 52 \text{ cm}$ ;  $a = 55 \text{ cm}$ ;  $b = 32 \text{ cm}$ . Vegyük a csonkagúla  $EH$  élre illeszkedő, alapsíkra merőleges metszetét! A síkmetszet olyan húrtrapéz, aminek szárjai a csonkagúla oldallapjainak magasságával egyenlők, magassága pedig a testmagassággal. Az 1894/II. ábrát tekintve:  $PT = (55 - 32) : 2 = 11,5 \text{ cm}$ . Pitagorasz tétele a  $PTE\Delta$ -re:  $m^2 = 11,5^2 + 52^2 \Rightarrow \Rightarrow m = 53,26 \text{ cm}$ .  $A = 55^2 + 32^2 + 4 \cdot \frac{55 + 32}{2} \cdot 53,26 \approx 13\,316,2 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{1,33 \text{ m}^2}}$ .

$$V = \frac{52}{3} \cdot (55^2 + 55 \cdot 32 + 32^2) \approx 100\,689,3 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{100,69 \text{ dm}^3}}$$

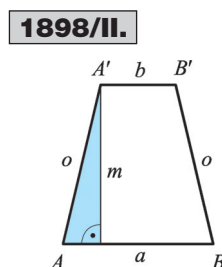
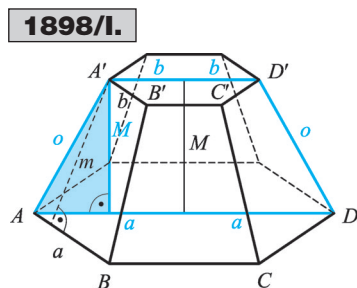
**1894/I.****1894/II.**

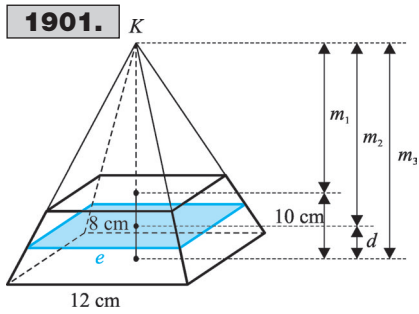


**1896.** Tekintsük a csonkagúla kiegészítő gúláját! Az egyesített test hasonló a kiegészítő gúlához. A hasonlóság aránya:  $\lambda = \frac{PS - PT}{PS} = 1 - \frac{PT}{PS}$ . Az alap háromszög súlypontja  $S$ , tehát  $PS = \frac{49,5\sqrt{3}}{6}$ .  $\angle QPT = 60^\circ$  és  $QT = 20 \text{ cm} \Rightarrow QP = \frac{40}{\sqrt{3}}$  és  $PT = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{20}{\sqrt{3}} : \frac{49,5\sqrt{3}}{6} = \frac{9,5}{49,5}$ . A fedőlap és az alaplapp hasonlóságából  $b = \lambda \cdot a = \frac{9,5}{49,5} \cdot 49,5 = 9,5 \text{ cm}$ .  $A = \frac{49,5^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9,5^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{49,5 + 9,5}{2} \cdot \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 3144 \text{ cm}^2 \approx \underline{\underline{31,44 \text{ dm}^2}}$ .  
 $V = \frac{20}{3} \cdot \left( \frac{49,5^2\sqrt{3}}{4} + \frac{49,5 \cdot 9,5\sqrt{3}}{4} + \frac{9,5^2\sqrt{3}}{4} \right) \approx 8691,3 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{8,69 \text{ dm}^3}}$ .

**1897.** Az oldallapok magassága Pitagorasz tételével:  $m^2 = 1,8^2 - \frac{(1,8 - 1,2)^2}{4} \Rightarrow m = 1,77 \text{ m}$ .  
 $A' = 1,2^2 + 4 \cdot \frac{1,2 + 1,8}{2} \cdot 1,77 \approx \underline{\underline{12,06 \text{ m}^2}}$ .

**1898.** Vegyük a csonkagúla olyan tengelymetszetét, ami az alaplapp egyik szimmetriaátlójára illeszkedik! Ez a síkmetszet egy olyan húrtrapéz, aminek magassága a testmagasság, szárjai a csonkagúla oldalélei, alapjai az alapél, illetve a fedőél kétszeresei. Legyen  $2a = 7,4 \text{ cm}$ ,





1901.

$2b = 4,8 \text{ cm}$ ,  $M = 7,4 \text{ cm}$ ! Pitagorasz tétele az 1898/I. ábrán kiemelt háromszögre:  $o^2 = 7,4^2 + \frac{(7,4 - 4,8)^2}{4} \Rightarrow o = 7,51 \text{ cm}$ . Számítsuk ki egy oldallap magasságát! Pitagorasz tétele az 1898/II. ábrán kiemelt háromszögre:  $m^2 = 7,51^2 - \frac{(3,7 - 2,4)^2}{4} \Rightarrow m = 7,48 \text{ cm}$ .

$$A = 6 \cdot \left( \frac{3,7^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{2,4^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3,7 + 2,4}{2} \cdot 7,48 \right) \approx \underline{\underline{187,42 \text{ cm}^2}}$$

$$V = \frac{7,4}{3} \cdot 6 \cdot \left( \frac{3,7^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{3,7 \cdot 2,4 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{2,4^2 \sqrt{3}}{4} \right) \approx \underline{\underline{181,55 \text{ cm}^3}}$$

**1899.**  $V = \frac{12}{3} (25 + \sqrt{25t} + t) = 916 \Rightarrow (\sqrt{t})^2 + 5\sqrt{t} - 204 = 0 \Rightarrow (\sqrt{t})_1 < 0$ , ez nem lehet.  $(\sqrt{t})_2 = 12 \Rightarrow t = \underline{\underline{144 \text{ m}^2}}$ .

**1900.** Tekintsük az 1894/I. ábrát, legyen  $a = 32 \text{ cm}$ ,  $b = 9 \text{ cm}$ !  $A = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot m$ , azaz  $2873 = 32^2 + 9^2 + 82m \Rightarrow m \approx 21,56 \text{ cm}$ . Az 1894/II. ábra szerint Pitagorasz tétele a kiemelt háromszögre:  $M^2 = m^2 - \left( \frac{a-b}{2} \right)^2 \Rightarrow M \approx 18,24 \text{ cm}$ ;

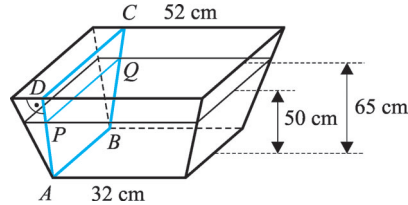
$$V = \frac{1}{3} M (a^2 + \sqrt{a^2 b^2} + b^2) = \frac{1}{3} M (a^2 + ab + b^2) \Rightarrow V \approx 8469,44 \text{ cm}^3 \approx \underline{\underline{8,47 \text{ dm}^3}}$$

**1901.**  $K$  középpontú hasonlóság miatt  $m_1 : 8 = m_2 : e = m_3 : 12$ ;  $m_3 = m_1 + 10 \Rightarrow m_1 : 8 = (m_1 + 10) : 12 \Rightarrow m_1 = 20 \text{ cm} \Rightarrow m_3 = 30 \text{ cm}$ .  $V_1 = \frac{1}{3} m_1 t_1 = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 8^2 \approx 426,7 \text{ cm}^3$  és  $V_3 = \frac{1}{3} m_3 t_3 = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12^2 = 1440 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_2 = V_1 + (V_3 - V_1) : 2 = 933,35 \text{ cm}^3$ .  $V_2 : V_1 = m_2^3 : m_1^3 \Rightarrow \Rightarrow m_2 = \sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} \cdot m_1 \approx 25,96 \text{ cm} \Rightarrow d \approx \underline{\underline{4,04 \text{ cm}}}$ .  $e : 8 = m_2 : m_1 \Rightarrow e = 8 \cdot \frac{m_2}{m_1} \approx \underline{\underline{10,38 \text{ cm}}}$ .

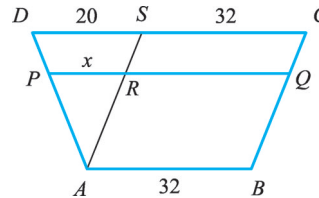
**1902. 1. eset:** a medence tele van.  $T = 196 \text{ m}^2$ ;  $t = 49 \text{ m}^2$ ;  $m = 6 \text{ m} \Rightarrow V = \underline{\underline{686 \text{ m}^3}}$ .

**2. eset:** a medence félig van.  $t = 49 \text{ m}^2$ ;  $m = 3 \text{ m}$ . A felső lap éle ekkor az oldallap trapéz középvonala.  $\Rightarrow$  A felső lap egy  $(14 + 7) : 2 = 10,5 \text{ m}$  oldalú négyzet, ezért területe  $T = 110,25 \text{ m}^2$ .  $\Rightarrow V = \underline{\underline{232,75 \text{ m}^3}}$ .

1903/I.



1903/II.



**1903.** A 1903/I. és 1903/II. ábra jelöléseivel:  $ARP\Delta \sim ASD\Delta$ , mert szögeik egyenlők, ezért oldalaik aránya egyenlő magasságaik arányával:  $\frac{x}{20} = \frac{50}{65} \Rightarrow x = \frac{200}{13} \Rightarrow PQ = \frac{616}{13}$ . A ládában levő virágföld csonkagúla alakot vesz fel, alsó négyzetlapjának oldala 32 cm, a felsőé  $\frac{616}{13} \approx 47,4$  cm.

$$V_{\text{csonkagúla}} = \frac{1}{3} m (T + \sqrt{Ti} + t) = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot (47,4^2 + \sqrt{47,4^2 \cdot 32^2} + 32^2) \approx 79\,792,7 \text{ cm}^3 \approx 0,079 \text{ m}^3.$$

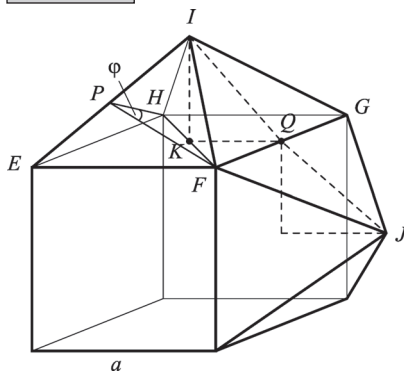
A föld tömege:  $0,079 \cdot 1400 \approx \underline{\underline{111,7 \text{ kg}}}$ .

### Poliéderek, szabályos testek

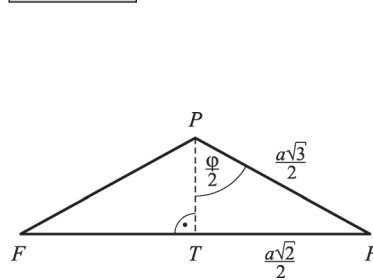
**1904.** Legyen az 1904. ábrák jelöléseivel a kocka éle  $a$ , az  $EI$  szakasz felezőpontja  $P$ !  $FP = HP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , mert egy-egy  $a$  oldalú szabályos háromszög súlyvonalai.  $FH = a\sqrt{2}$ , mert egy  $a$  oldalú

négyzet átlója. A gúla két oldallapjának szöge:  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \varphi \approx 109,47^\circ$ . A kocka

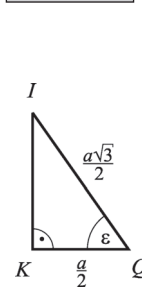
1904/I.

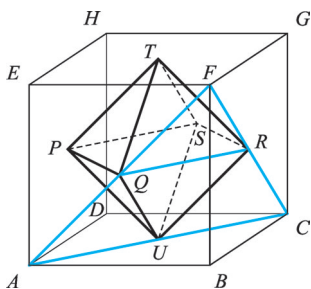


1904/II.



1904/III.



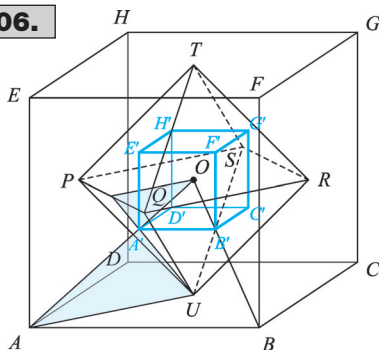
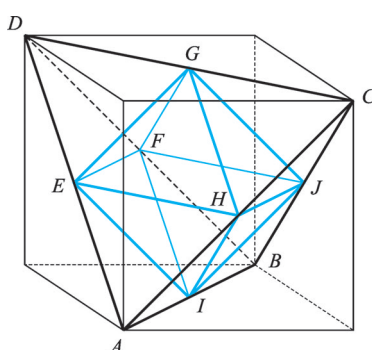
**1905.**

egy élére illeszkedő két szabályos háromszög lapszöge, azaz  $\sphericalangle IQJ$  kiszámítása:  $\cos \varepsilon = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon \approx 54,74^\circ \Rightarrow \sphericalangle IQJ = \varepsilon + 90^\circ + \varepsilon \approx 199,47^\circ \neq \varphi$ . A keletkezett test szomszédos lapjai különböző szögeket zárnak be.  $\Rightarrow$  Nem szabályos a test.

**1905.** Legyen a kocka élhossza  $a$ . A kocka bármely két szomszédos lapközepontjának távolsága egyenlő a kocka egy lapátlójának felével. Például az 1905. ábra jelöléseivel  $QR = \frac{1}{2} AC$ , mert  $QR$  középvonala az  $ACF$  háromszögnek. A keletkezett test minden éle  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  hosszúságú  $\Rightarrow$  lapjai egybevágó szabályos háromszögek. A  $PQRS$  egyenlő oldalú négyszög, tehát rombusz.  $PR$ , illetve  $QS$  átlója párhuzamos és egyenlő a kocka  $AB$ , illetve  $BC$  élével  $\Rightarrow$  átlói egyenlő hosszúak  $\Rightarrow PQRS$  négyszög négyzet. Hasonlóan  $QUST$  és  $PURT$  négyszög is négyzet. A  $PQRSTU$  test egy csúcsból induló négy éle egy-egy egybevágó négyzet alapú szabályos gúla négy oldaléle  $\Rightarrow$  szögletei egybevágók. A kocka lapközepontjai egy szabályos test (egy szabályos oktaéder) csúcsai.

**1906.** A kocka középpontjára szimmetrikus mindhárom test. Az oktaéder lapközepontjai az oldallap szabályos háromszögek súlypontjai. Vetítsük az  $O$  középpontból a  $PUQ$  lap  $A'$  középpontját a kocka felületére! A súlypont harmadoló tulajdonsága miatt az  $A'$  pont az  $A$  pontba kerül, a vetítés pedig egy  $O$  középpontú  $\lambda' = 3$  arányú középpontos hasonlóság. Ezt bármelyik lapközeponttal megismételhetjük. Az oktaéder lapközepontjai tehát egy olyan kocka csúcsai, amely az eredetinek  $O$  középpontú,  $\lambda = \frac{1}{3}$  arányú hasonlósággal nyert képe.

**1907.** A szabályos tetraédert származtathatjuk egy kockából úgy, hogy a tetraéder élei a kocka lapátlói legyenek. A tetraéder élfelező pontjai egyben a kocka lapközepontjai is. Az 1905. feladatban bizonyítottak szerint a szabályos tetraéder élfelező pontjai egy szabályos oktaéder csúcsai.

**1906.****1907.**

**1908.** A két tetraéder élei a felezőpontjukban metszik egymást. A metszéspontok a kocka lapközéppontjai, amelyek az 1905. feladatban bizonyítottak szerint egy szabályos oktaéder csúcsai.

**1909.** Az 1905. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder elhelyezhető egy kockában úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközéppontjai.  $\Rightarrow$  Az oktaéder testátlói a kocka két szemközti lapjának középpontjait összekötő szakaszok.  $\Rightarrow$  A testátlók párhuzamosak a kocka egy csúcsból induló élével, amelyek páronként merőlegesek egymásra.  $\Rightarrow$  Az oktaéder testátlói merőlegesek egymásra.

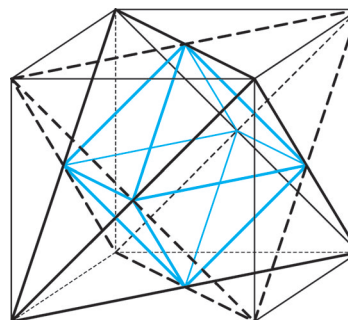
**1910.** Az 1906. feladatban beláttuk, hogy a szabályos oktaéder lapközéppontjai kockát határoznak meg. Az oktaéder lapjait a kocka három-három egymáshoz csatlakozó lapátlója síkjával párhuzamos síkok határozzák meg. Ha egy kocka minden csúcsán át a szomszédos három csúcs által kifeszített síkkal párhuzamosan felvesszünk egy síkot, éppen a fent említett szabályos oktaéderhez jutunk.

**1911.** Legyenek az  $I, J, K, L, M, N$  pontok az oktaéder élfelező pontjai. Az oktaéder  $PUQ$  lapja középvonal-háromszög az  $EBD$  háromszögben,  $SRT$  lapja pedig középvonal-háromszög a  $CFH$  háromszögben.  $[EBD] \parallel [CFH] \Rightarrow [PUQ] \parallel [SRT]$ . Mivel  $IJ$  középvonala  $PQT$  háromszögnek, az  $IJ$  szakasz benne van a  $[PUQ]$  és az  $[SRT]$  középpárhuzamos síkjában és  $IJ = \frac{1}{2} PQ$ .

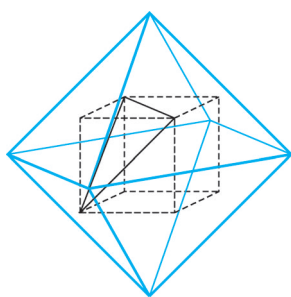
Hasonlóan belátható, hogy  $JK, KL, LM, MN, NI$  szakaszok is ebben a síkban vannak, és hosszuk az oktaéder élhosszána a fele.  $\Rightarrow$  Az  $IJKLMN$  egy síkbeli egyenlő oldalú hatszög.  $IJ \parallel PQ \parallel DB$  és  $JK \parallel TR \parallel CH \parallel BE \Rightarrow DBE \sphericalangle$  és  $IJK \sphericalangle$  párhuzamos szárú szögek, valamint  $JK$  és  $BE$  szárak ellentétes irányú  $\Rightarrow IJK \sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . Hasonlóan igazolható, hogy az  $IJKLMN$  sokszög minden szöge egyenlő. Az aláhúzottakból következik, hogy az oktaéder  $IJKLMN$  síkmetszete egy szabályos hatszög.

**1912.** Egy adott  $a$  élű kockából származtassuk a  $BGDE$  szabályos tetraédert és a  $PQRSTU$  szabályos oktaédert az 1905. és az 1907. feladatban ismertetett módon. A tetraéder élei lapátlók, hosszuk  $a\sqrt{2}$ . Az oktaéder csúcsai lapközéppontok, egyben a tetraéder élfelező pontjai,

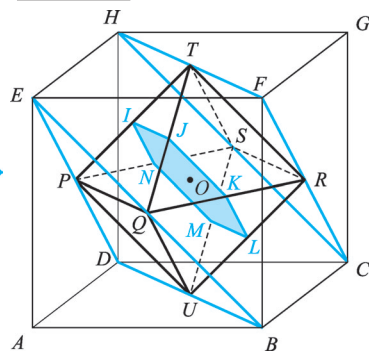
1908.



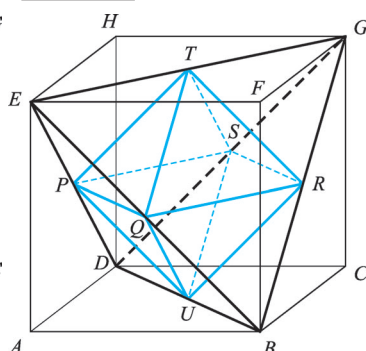
1910.



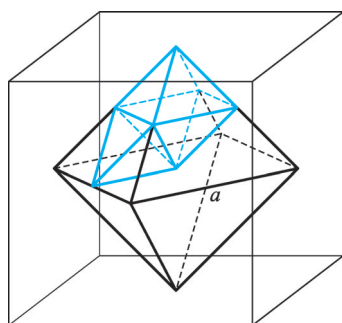
1911.



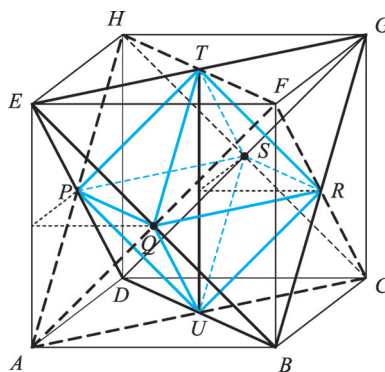
1912.



1913.



1914.



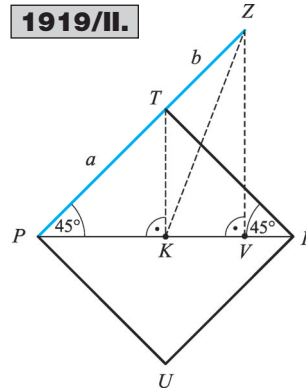
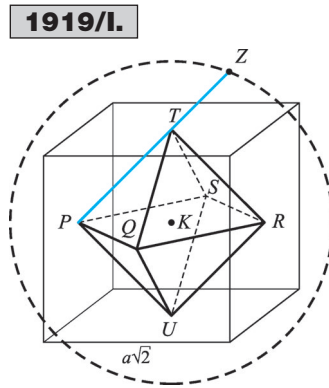
ezért az oktaéder élhossza  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . A tetraéderből az élfelvező pontok négy egybevágó  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  élhosszúságú szabályos tetraédert vágnak le, a  $PQTE$ ,  $RSTG$ ,  $PUSD$ ,  $URQB$  testeket. E négy tetraéderből és az oktaéderből a kívánt módon összeállítható a kétszeres élű  $DBGE$  szabályos tetraéder.

**1913.** Az oktaéder egy csúcsa, azzal szomszédos négy élfelvező pontja és középpontja fele akkora élű, az eredetihez hasonló szabályos oktaédert határoz meg. Az oktaéder mind a hat csúcsánál levághatunk ilyen egybevágó,  $\frac{a}{2}$  élű oktaédert. Így az eredeti oktaédernek mind a nyolc lapján megmarad a középvonal háromszög, s ahhoz kapcsolódva egy-egy  $\frac{a}{2}$  élű szabályos tetraéderrel kitölthető az  $a$  élű oktaéder. Tehát hat darab  $\frac{a}{2}$  élű szabályos oktaéderből és nyolc darab  $\frac{a}{2}$  élű szabályos tetraéderből összeállítható egy  $a$  élű szabályos oktaéder.

**1914.** A két tetraéder közös része egy szabályos oktaéder, a  $PQRSTU$  test. Ennek 12 éléhez illeszkednek a kimaradt részek, az  $EAQP$  tetraéderrel egybevágó testek. Az  $EAQP$  test  $\vec{AU}$  vektorral való eltoltja a  $TURS$  test  $\Rightarrow EAQP \cong TURS$ .  $TURS$  éppen negyede a  $PQRSTU$  szabályos oktaédernek.  $\Rightarrow$  A 12 kimaradó részből 3 darab szabályos oktaéder állítható össze, amelyek mindegyike egybevágó a két tetraéder közös részével, a  $PQRSTU$  oktaéderrel.

**1915.** Az 1914. feladatban láttuk, hogy egy  $a$  élű kockába beírt két tetraéder nyolc darab  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  élű szabályos tetraédert, egy  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  élű szabályos oktaédert és tizenkét darab  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  élű „szabályos oktaéder-negyedet” határoz meg. Rakjuk ki kockákkal a teret, ez lehetséges. Bontsunk fel minden kockát a fentiekben megadott módon! Így a közös élben találkozó négy kockában egymáshoz csatlakoznak a „szabályos oktaéder-negyedek”.  $\Rightarrow$  Kitölthető a tér egyetlen élű szabályos tetraéderekkel és oktaéderekkel.

**1916.** Az 1914. feladat megoldásában láttuk, hogy egy kocka szétdarabolható 1 szabályos oktaéderre, 8 szabályos tetraéderre és 12 „szabályos oktaéder-negyed”-re. Két kockában 2 szabályos oktaéder, 16 szabályos tetraéder és 24 „szabályos oktaéder-negyed” van. Ennyi „oktaéder-



negyed"-ből 6 darab, az előzőkkel egyenlő élű szabályos oktaéder rakható össze. Így összesen két kockából 8 oktaéderünk és 16 tetraéderünk van. Az 1913., illetve az 1912. feladat szerint 6 oktaéderből és 8 tetraéderből 1 darab kétszeres élű szabályos oktaéder, illetve 2 oktaéderből és 8 tetraéderből 2 darab kétszeres élű szabályos tetraéder lesz. Tehát a kockát átbarabolhatjuk két szabályos tetraéderbe és egy szabályos oktaéderbe.

**1917.** A szabályos oktaéder beírható egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközpontjai. A kocka beírt gömbje a lapközpontokban érinti a kocka lapjait. Ez a gömb egyben az oktaéder köré írható gömb, amelynek középpontja az oktaéder és a kocka közös középpontja, sugara pedig az oktaéder testátlójának fele.

**1918.** A szabályos oktaéder lapközpontjai olyan kockát határoznak meg, amelynek testátlói merőlegesek az oktaéder szemközti lappárjaira. Tehát a kocka körülírt gömbje egyúttal az oktaéder beírt gömbje, melynek átmérője a kocka testátlója.

**1919.** Legyen a szabályos oktaéder éle  $a$ , a meghosszabbítás  $b$ . Vizsgáljuk a  $PURT$  síkmetsetet! A kocka éle  $PR = a\sqrt{2}$ . A  $TZ$  szakasz  $PR$  egyenesre eső merőleges vetülete  $KV = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ .

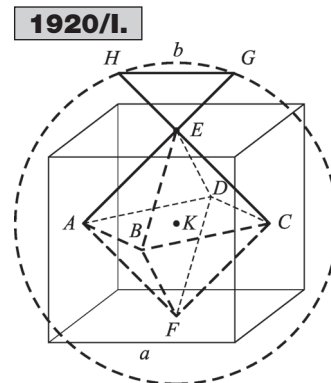
A  $PT$  szakasz  $PR$  egyenesre eső merőleges vetülete  $PK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VZ = PV = PK + KV = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$ . A gömb sugara  $KZ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ , mert a kocka testátlójának fele. A  $KVZ$  derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint:  $KV^2 + VZ^2 = KZ^2$ , azaz

$$\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow 2b^2 + 2ab - 2a^2 = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 - ab = a(a-b) \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

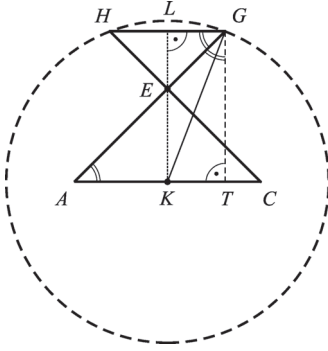
Tehát a  $TZ$  meghosszabbítás az oktaéder élének hosszabbik aranymetszete.

**1920.** Legyen az oktaéder  $AE$  és  $CE$  élének a körülírt gömbbel való metszéspontja  $G$  és  $H$ .

Az  $AC$  és a  $GH$  szakasz szimmetrikus az  $EF$  egyenesre  $\Rightarrow GH \parallel AC$ .  $\sphericalangle CAE = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle EGH = 45^\circ \Rightarrow GEH\Delta$  egyenlő



1920/II.



szárú derékszögű háromszög. Tekintsük az oktaéder  $A, F, C, E$  csúcsait tartalmazó síkot, ami a kocka köré írt gömbből a  $K$  középpontú  $KG$  sugarú főkört metszi ki!

$$KG = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad AK = KC = \frac{a}{2}; \quad LG = KT = \frac{b}{2}; \quad GT = AT = \frac{a+b}{2},$$

hiszen  $\Rightarrow ATG\Delta$  is egyenlő szárú derékszögű háromszög.  $KTG$  derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel szerint:  $GK^2 = KT^2 + GT^2$ , azaz  $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 - ab \Rightarrow \underline{\underline{\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}}},$$

tehát a  $GH$  távolság a kocka élének hosszabbik aranymetszete. Mivel a  $LEG\Delta$  egyenlő szárú derékszögű,  $LE = \frac{b}{2}$ , ami a  $GH$  szakasz távolsága az alatta levő kockalaptól. Megjegyzés:  $b^2 + ab - a^2 = 0$  alapján  $b = \frac{(\sqrt{5} - 1)a}{2}$  kiszámítható.

**1921.** Az 1920. feladatban láttuk, hogy az  $a$  élű kockából a megadott származtatással kapott  $Z, Y$  pontokra  $ZY \parallel DE$ ;  $GC = \frac{1}{2}ZY = \frac{b}{2}$ , ahol  $b^2 + ab - a^2 = 0$ . a)  $DE \parallel MN \Rightarrow ZY \parallel MN \Rightarrow MZYN$  síkbeli négyszög és trapéz. Be kell látnunk, hogy az  $X$  pont is az  $MZYN$  trapéz síkjában van. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy  $X, F$  és  $G$  pontok egy egyenesen vannak. Vizsgáljuk az  $A, C, B$  pontokat tartalmazó síkot!  $XX' = \frac{b}{2}$ ;  $FC = \frac{a}{2}$ ;  $X'F = \frac{a-b}{2}$ ;  $CG = \frac{b}{2}$ ;  $\frac{XX'}{FC} = \frac{b}{a}$ ;  $\frac{X'F}{CG} = \frac{a-b}{b}$ ;  $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0 \Rightarrow \frac{XX'}{FC} = \frac{X'F}{CG} \Rightarrow XX'F \Delta \sim FCG\Delta$ , mert két-két oldaluk aránya és az azok által közrezárt szögük egyenlő  $\Rightarrow$  megfelelő szögeik egyenlők. Például  $\sphericalangle X'XF = \sphericalangle CFG \Rightarrow X, F, G$  egy egyenesen van.

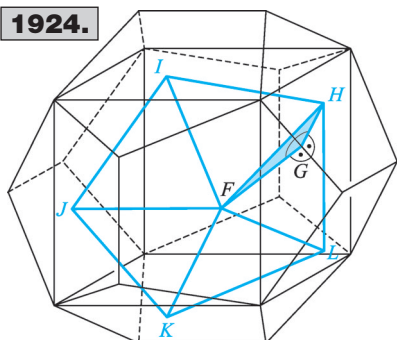
b) A származtatásból következik, hogy az  $M, Z, Y, N, X$  pontok a kocka köré írható gömb pontjai. Mivel egy síkban vannak, és a gömb síkmetszetei körök  $\Rightarrow MZYNX$  húrsokszög.

c) A származtatás szerint  $MX = MZ = NX = NY$ . Pitagorasz-tétel az  $XX'F$  derékszögű háromszögben:  $XF^2 = XX'^2 + X'F^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4}$ . Pitagorasz-tétel az  $MFX$  derékszögű háromszögben:  $MX^2 = MF^2 + XF^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{4} = \frac{b^2 - ab + a^2}{2}$ . Az a)

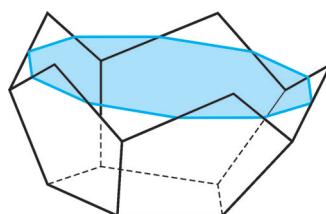
pontban kapott  $b^2 + ab - a^2 = 0$  összefüggést felhasználva  $MX^2 = b^2$  adódik.  $\Rightarrow MX = b \Rightarrow$  Az  $MZYNX$  ötszög oldalai egyenlők. Az előző pontban beláttuk, hogy ez az ötszög körbe írható.  $\Rightarrow$  Szabályos ötszög csúcsai a vizsgált pontok.

**1922.** Az 1921. feladat megoldásában láttuk, hogy az  $a$  élű kockából a megadott módon származtatott 12 pont, valamint a kocka 8 csúcsa rajta van a kocka köré írt gömbön, és a megfelelő

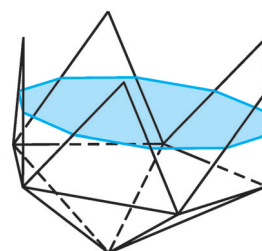
1924.



1925/I.



1925/II.



II

pontok 12 darab egybevágó szabályos ötszöget alkotnak.  $\Rightarrow$  A test 12 darab olyan egybevágó szabályos ötszög alapú gúlóra bontható, amelyeknek oldalélei egyenlők, s ezek az oldalélek a kocka köré írt gömb sugarai.  $\Rightarrow$  A test 12 szöglete egybevágó. A test szabályos tizenkétlapú test, vagyis dodekaéder.

**1923.** A dodekaédert az 1922. feladatban leírt módon származtathatjuk.  $\Rightarrow$  A dodekaéder 8 megfelelő csúcsa éppen egy beírt kocka csúcsait adja meg. A kocka éle egyenlő a dodekaéder egy lapátlójával, és a beírt kocka egy éle párhuzamos a dodekaéder két szemközti élével. Egy szabályos ötszöglap minden átlójához illeszthető beírt kocka.  $\Rightarrow$  5 különböző helyzetű, egybevágó kocka írható a dodekaéderbe.

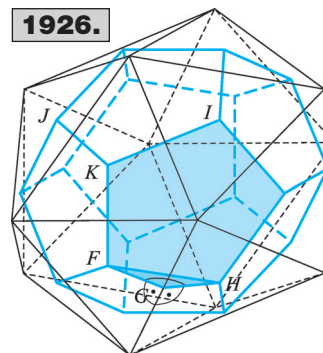
**1924.** A dodekaéder 12 lapközepontja egy 12 csúcsú testet határoz meg. Mivel a dodekaéder szabályos test, lapszögei, megfelelő hosszúságadatai egyenlők.  $\Rightarrow$  A keletkezett test minden élének hossza egyenlő az  $FGH$  egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol  $F$  és  $H$  két szomszédos lapközepont,  $G$  pedig e lapok közös élének felezéspontja.  $\Rightarrow$  A test lapjai szabályos háromszögek. A dodekaéder bármely lapközepontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközepontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos dodekaéder lapközepontjai 12 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos ikozaédert határoznak meg.

**1925.** a) A szabályos dodekaéder két szemközti párhuzamos lapjának középpontját összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi a dodekaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, a tízszög oldalának hossza feleakkora, mint a dodekaéder lapátlója.  $\Rightarrow$  A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak a dodekaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő a dodekaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával.  $\Rightarrow$  A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

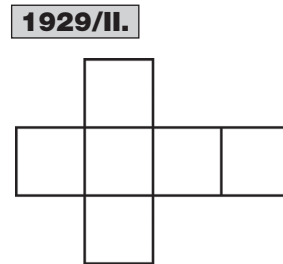
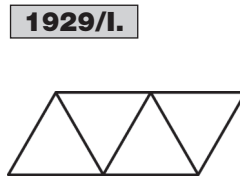
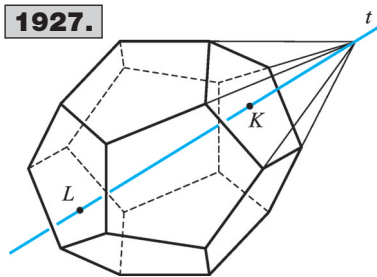
b) A szabályos ikozaéder két átellenes csúcsát összekötő szakasz felező merőleges síkja tízszögben metszi az ikozaédert. A tízszög csúcsai élfelező pontok, és a tízszög oldala feleakkora, mint az ikozaéder éle.  $\Rightarrow$  A tízszög egyenlő oldalú sokszög. A tízszög csúcsai egyenlő távol vannak az ikozaéder körülírt gömbjének középpontjától, hiszen ez a távolság egyenlő az ikozaéder egy éle és a gömb középpontja által meghatározott egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságával.  $\Rightarrow$  A tízszög csúcsai egy körön vannak. A körbe írható egyenlő oldalú tízszög szabályos.

**1926.** A szabályos ikozaéder 20 lapközepontja 20 csúcsú testet határoz meg. Mivel az ikozaéder szabályos test, lapszögei és megfelelő hosszúságadatai egyenlők.  $\Rightarrow$  A keletkezett

1926.



II



test minden élének hossza egyenlő az  $FGH$  egyenlő szárú háromszög alapjának hosszával, ahol  $F$  és  $H$  két szomszédos lap középpontja,  $G$  pedig e lapok közös élének felezéspontja. Az ikozaéder bármely lapközepontja a hozzá csatlakozó szomszédos lapok középpontjaival szabályos háromoldalú gúlát határoz meg. A kiszemelt lapközepontnál a gúla élszögei egyenlők. Tehát a szabályos ikozaéder lapközepontjai 20 csúcsú szabályos testet, azaz szabályos dodekaédert határoznak meg.

**1927.** Mivel a szabályos dodekaéder forgásszimmetrikus a két átellenes lapközepontján átmenő egyenes körüli  $72^\circ$ -os elforgatásra, a megadott élek ezen az egyenesen metszik egymást.

**1928.** Tekintsük a szabályos dodekaéder egy lapjának csúcsaiba érkező azon éleket, amik nem illeszkednek e lap síkjára. Az 1927. feladatban láttuk, hogy ez az öt egyenes egy ponton megy át. Ez a metszéspont rajta van az adott lap középpontját a dodekaéder középpontjával összekötő egyenesen. A dodekaéder szabályos test, ezért minden laphoz tartozik egy ilyen metszéspont. Ezek a metszéspontok egyenlő távol vannak a dodekaéder középpontjától, ezért a dodekaéder lapközepontjainak középpontos hasonlósággal nyerhető képei (a hasonlóság középpontja a szabályos dodekaéder köré írt gömbjének középpontja). Az 1924. feladatban láttuk, hogy a szabályos dodekaéder lapközepontjai szabályos ikozaéder csúcsai.  $\Rightarrow$  A feladat feltételeinek megfelelő öt-öt él metszéspontjai is egy szabályos ikozaéder csúcsai.

**1929.** A szabályos testek egy-egy hálóját ábrázoltuk.

A szabályos tetraéder hálója: 1929/I. ábra.

A kocka hálója: 1929/II. ábra.

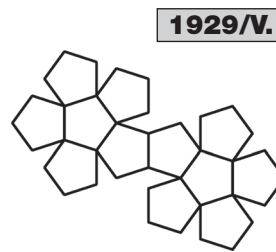
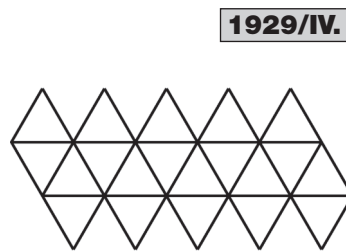
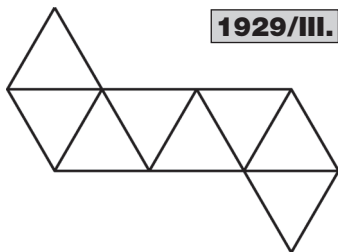
A szabályos oktaéder hálója: 1929/III. ábra.

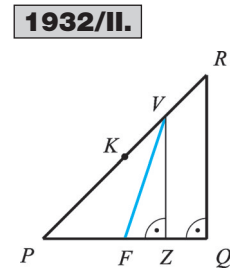
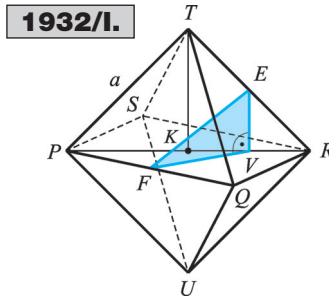
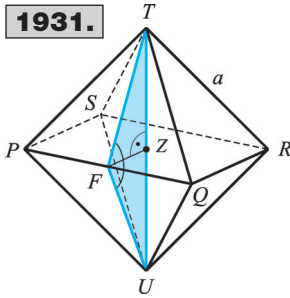
A szabályos ikozaéder hálója: 1929/IV. ábra.

A szabályos dodekaéder hálója: 1929/V. ábra.

**1930.** Tekintsük az 1905. ábrát, legyen  $AB = x$ ,  $QR = a$ ! A szabályos oktaédert beírhatjuk egy kockába úgy, hogy az oktaéder csúcsai a kocka lapközepontjai. Az oktaéder éle feleakkora, mint a kocka lapátlója. Az  $ACF$  háromszögben a  $QR$  szakasz középvonal  $\Rightarrow QR = \frac{1}{2} AC$  és  $a =$

$= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} x \sqrt{2}$ . Az oktaéder két szemközti élének távolsága a felezéspontokat összekötő

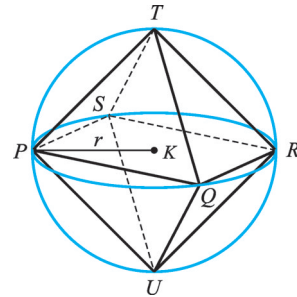




szakasz hossza, ami egyenlő az oktaéder élhosszával.  $\Rightarrow \underline{d = a}$ . Az oktaéder testátlója  $QS = x = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \underline{a\sqrt{2}}$ .

**1931.**  $FT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , mert a  $TUF$  szabályos háromszög magassága.  $TU = a\sqrt{2}$ , mert egy  $a$  oldalú négyzet átlója.  $TZ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , mert  $Z$  a  $TU$  szakasz felezéspontja.  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{TZ}{TF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{109,47^\circ}$  két szomszédos lap szöge.

**1933.**



**1932.**  $EV$  középvonal az  $RTK$  háromszögben  $\Rightarrow EV = \frac{1}{2}TK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .  $VZ \parallel RQ$  és  $V$  negyedelőpont  $\Rightarrow Z$  negyedelőpont a  $PQ$  szakaszon  $\Rightarrow ZQ = \frac{1}{4}a$ ,  $VZ = \frac{3}{4}a$  és  $FZ = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$ . Pitagorasz-tétel az  $FZV$  derékszögű háromszögben:

$$FV^2 = FZ^2 + VZ^2. FV^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} \Rightarrow FV^2 = \frac{5a^2}{8}.$$

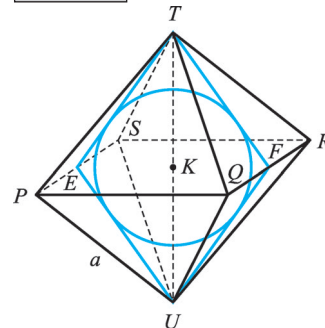
Pitagorasz-tétel az  $FVE$  derékszögű háromszögben:

$$FE^2 = FV^2 + EV^2. FE^2 = \frac{5a^2}{8} + \frac{2a^2}{16} \Rightarrow FE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

**1933.** Az  $a$  oldalú szabályos oktaéder köré írható gömb átmérője az  $a$  oldalú négyzet átlója.

$$2r = 2PK = PR \Rightarrow \text{Az oktaéder köré írt gömb sugara } r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

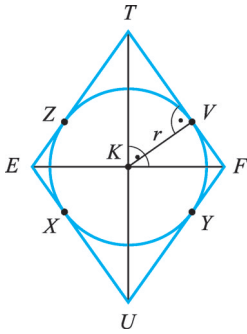
**1934/I.**



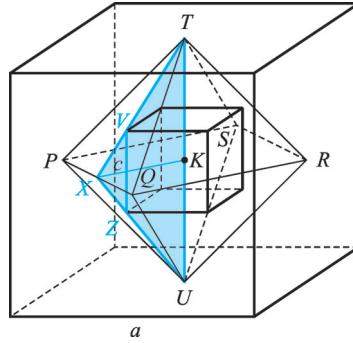
**1934.** Tekintsük az  $E, F$  felezéspontokon átmenő és  $T, U$  csúcsokat tartalmazó síkmetszetet!

II

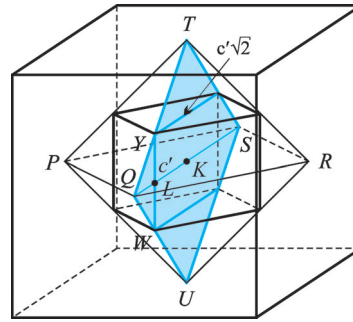
1934/II.



1936/I.



1936/II.



Az *EUFT* négyzet rombusz, oldalainak hossza  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Az oktaédert a beírt gömb a lapok súly-

pontjában érinti  $\Rightarrow X, Y, V, Z$  harmadolja a rombusz oldalait.  $KT = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $KF = \frac{a}{2}$ ;

$TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VF = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Pitagorasz tétele a *KVF* derékszögű háromszögre:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

**1935.** A szabályos oktaéder két párhuzamos lapja tartalmaz két kitérő élt, melyek normál-transzverzálisának hossza egyenlő a két lap síkjának távolságával. Ez egyenlő az oktaéder beírt gömbjének átmérőjével. Az 1934. feladatban láttuk, hogy az  $a$  élű szabályos oktaéder beírt gömbjének sugara  $\frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$  az átmérő hossza, s egyben két kitérő él távolsága  $2r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

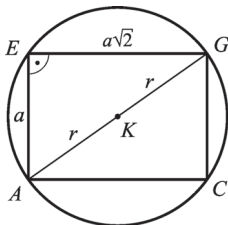
**1936.** Az  $a$  élű kockába írt oktaéder éle:  $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . **1. eset:** a beírt kocka csúcsai az oktaéder lapközéppontjai ( $V, Z$ ), élének hossza  $c$ . Ekkor  $V$ , illetve  $Z$  harmadolja  $TX$ , illetve  $UX$  súlyvonalat  $\Rightarrow XV:XT = c:a = 1:3$ . A két kocka élének aránya  $1:3$ .

**2. eset:** a beírt kocka csúcsai az oktaéder élére illeszkednek, élének hossza  $c'$ . Ekkor az  $a$  élű kockába írt oktaéder testátlója:  $QS = a$ . A  $c'$  élű beírt kocka átlós síkmetszetéből leolvasható,

hogy  $QS = c' + c'\sqrt{2} \Rightarrow c' = \frac{a}{1 + \sqrt{2}}$ . A két kocka élének aránya

$$1 : (1 + \sqrt{2}).$$

1937/I.



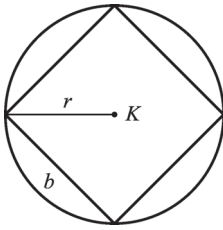
**1937.** Az  $r$  sugarú gömbbe  $a$  élű kockát írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy kockacsúcsot tartalmazó főkörmetsetét! (1937/I. ábra)

Pitagorasz tétele az *ACG* derékszögű háromszögre:

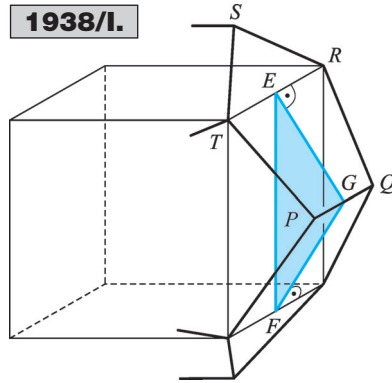
$$a^2 + (a\sqrt{2})^2 = (2r)^2 \Rightarrow 3a^2 = 4r^2 \Rightarrow a = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Az  $a$  élű kockába írt gömb sugara  $\underline{\underline{\frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}}}$ .

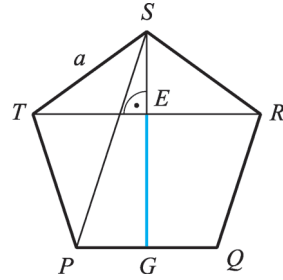
1937/II.



1938/I.



1938/II.



II

Az  $r$  sugarú gömbbe  $b$  élű oktaédert írunk. Tekintsük a gömbnek egy négy oktaédercsúcsot tartalmazó főkörmetsetét! (1937/II. ábra)

$b = r\sqrt{2}$ . A  $b$  élű oktaéderbe írt gömb sugara az 1934. feladat

szerint:  $\underline{\underline{\rho' = \frac{b\sqrt{6}}{6} = \frac{r\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} = \frac{r}{\sqrt{3}}}}$ .  $\Rightarrow \rho = \rho'$ , a két beírt

gömb sugara egyenlő.

**1938.** Legyen a szabályos dodekaéder éle  $a$ , a beírt kocka éle  $x$ . Az 1920. feladat megoldásában láttuk, hogy

$a = \frac{(\sqrt{5}-1)x}{2} \Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$ . Pitagorasz-tétel a  $TES$  és a

$PGS$  derékszögű háromszögre:  $SE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$  és  $SG = \sqrt{x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ .  $EG = SG - SE =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2 x^2}{16}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2 x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \left( \frac{1}{2} \sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}} \right).$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \left( \frac{1}{2} \sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}} \right)} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{116,58^\circ}}$$

a szabályos dodekaéder két szomszédos lapjának szöge.

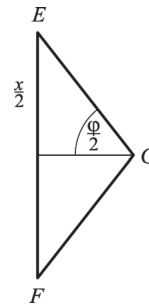
**1939.** A szabályos ikozaéder egy csúcsba futó öt éle egy szabályos ötoldalú gúlát határoz meg. Két szomszédos lap szögének kiszámításakor ezt a gúlát vizsgáljuk. (1939/I. ábra) Legyen az

ikozaéder éle  $a!$   $TE = EQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , mert egy-egy  $a$  oldalú

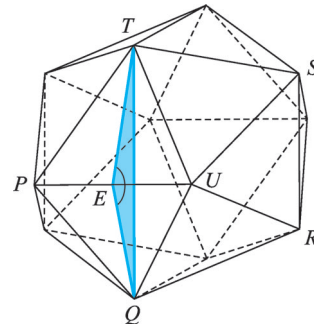
szabályos háromszög magasságai. Az 1920. feladat megoldásában pedig láttuk, hogy az  $a$  oldalú  $PQRST$  szabályos ötszög átlója

$QT = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$ . A  $TQE\Delta$ -ben. (1939/II. ábra)

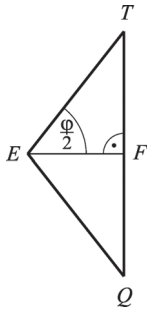
1938/III.



1939/I.



II

**1939/II.**

$$TF = \frac{1}{2} QT = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{4} \text{ és az } EFT \text{ derékszögű háromszögben } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a(\sqrt{5} + 1)}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi \approx \underline{\underline{138,19^\circ}}$$

a szabályos ikozaéder bármely két szomszédos lapjának szöge.

**1940.**

A szabályos test	éleinek száma	egy élének hossza, ha az élek összege $12a$
tetraéder	6	$2a$
kocka	12	$a$
oktaéder	12	$a$
ikozaéder	30	$\frac{2a}{5}$
dodekaéder	30	$\frac{2a}{5}$

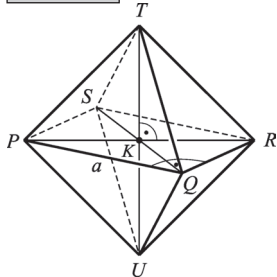
**1941.** Tekintsük az 1941. ábrát. Adott a PQRS négyzet átlója:  $PR = d \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} d$ , valamint  $PR = TU \Rightarrow TK = \frac{1}{2} d$ .  $V = 2 \cdot V_{PQRST} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{PQRS} \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot PQ^2 \cdot TK = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{2} d = \frac{1}{6} d^3$ .

**1942. 1. eset:** Kocka; felszíne  $6a^2 \Rightarrow$  az élé:  $\underline{\underline{a}}$ .

**2. eset:** Tetraéder; élé  $b$ ; felszíne  $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = 6a^2 \Rightarrow b = \underline{\underline{\sqrt[4]{12} \cdot a}}$ .

**3. eset:** Oktaéder; élé  $c$ ; felszíne  $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = 6a^2 \Rightarrow c = \underline{\underline{\sqrt[4]{3} \cdot a}}$ .

**4. eset:** Dodekaéder; élé  $d$ ; felszíne  $12 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{d}{2} \cdot \text{tg } 54^\circ = 6a^2 \Rightarrow d = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{5 \cdot \text{tg } 54^\circ}} \cdot a}}$ .

**1941.**

**5. eset:** Ikozaéder; élé  $e$ ; felszíne  $20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} e^2 = 6a^2 \Rightarrow e = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{12}{25}} \cdot a}}$ .

**1943.** A közös felszín  $F$ .

Tetraéder élé:  $a$ ; felszíne  $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = F \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3}}$ ; térfogata

$$V_t = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{36} F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 3}.$$

Oktaéder éle:  $b$ ; felszíne  $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = F \Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{F^2}{12}}$ ; térfogata  $V_o = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 = \frac{\sqrt{2}}{36} F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 12}$ .

Kocka éle:  $c$ ; felszíne  $6c^2 = F \Rightarrow c = \sqrt{\frac{F}{6}}$ ; térfogata  $V_k = c^3 = \frac{F}{6} \sqrt{\frac{F}{6}}$ .

$$\begin{aligned} V_t : V_o : V_k &= \left( \frac{\sqrt{2}}{36} F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 3} \right) : \left( \frac{\sqrt{2}}{36} F \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 12} \right) : \left( \frac{F}{6} \cdot \sqrt{\frac{F}{6}} \right) = \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{36} \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 3} \right) : \left( \frac{\sqrt{2}}{36} \cdot \sqrt[4]{F^2 \cdot 12} \right) : \left( \frac{6}{36} \cdot \sqrt[4]{\frac{F^2}{36}} \right) = \sqrt[4]{12} : \sqrt[4]{48} : \sqrt[4]{36} = 1 : \sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{3} = \\ &= 1 : \sqrt{2} : \sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

**1944.** A közös térfogat  $V$ .

Tetraéder éle:  $a$ ; térfogata  $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = V \Rightarrow a = \sqrt[6]{72V^2}$ ; felszíne  $F_t = \sqrt{3} \cdot a^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{72V^2}$ .

Oktaéder éle:  $b$ ; térfogata  $\frac{\sqrt{2}}{3} b^3 = V \Rightarrow b = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2}}$ ; felszíne  $F_o = 2\sqrt{3} \cdot b^2 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}}$ .

Kocka éle:  $c$ ; térfogata  $c^3 = V \Rightarrow c = \sqrt[3]{V}$ ; felszíne  $F_k = 6c^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$ .

$$\begin{aligned} F_t : F_o : F_k &= \left( \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{72V^2} \right) : \left( 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}} \right) : \left( 6 \cdot \sqrt[3]{V^2} \right) = \left( \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{72} \right) : \left( 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \right) : 6 = \\ &= \sqrt[6]{27 \cdot 72^2} : \sqrt[6]{64 \cdot 27 \cdot \frac{81}{4}} : 6 = \left( 6 \cdot \sqrt[6]{3} \right) : \left( 6 \cdot \sqrt[6]{\frac{3}{4}} \right) : 6 = \left( \sqrt[6]{3} \right) : \left( \sqrt[6]{\frac{3}{4}} \right) : 1 = 1 : \sqrt[6]{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

**1945.** Tetraéder éle:  $a$ ; felszíne  $\sqrt{3} a^2$ ; térfogata  $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ . Oktaéder éle:  $a$ ; felszíne  $2\sqrt{3} a^2$ ;

térfogata  $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ . Kocka éle:  $a$ ; felszíne  $6a^2$ ; térfogata  $a^3$ .

a)  $F_t : F_o : F_k = \left( \sqrt{3} a^2 \right) : \left( 2\sqrt{3} a^2 \right) : \left( 6a^2 \right) = \sqrt{3} : 2\sqrt{3} : 6 = \underline{\underline{1 : 2 : 2\sqrt{3}}}$ .

b)  $V_t : V_o : V_k = \left( \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \right) : \left( \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \right) : a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} : \frac{\sqrt{2}}{3} : 1 = \sqrt{2} : 4\sqrt{2} : 12 = \underline{\underline{1 : 4 : 6\sqrt{2}}}$ .

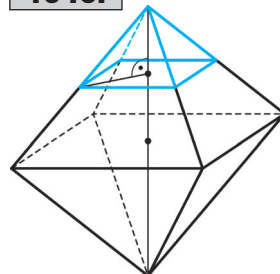
**1946.** Minden levágott „csúcs” hasonló az oktaédert alkotó két szabályos gúla egyikéhez. A hasonlóság aránya  $\frac{1}{2}$ , a térfogatok aránya

$\frac{1}{8}$ . Az oktaéder hat csúcsánál az eredeti térfogat felének  $\frac{6}{8}$ -át,

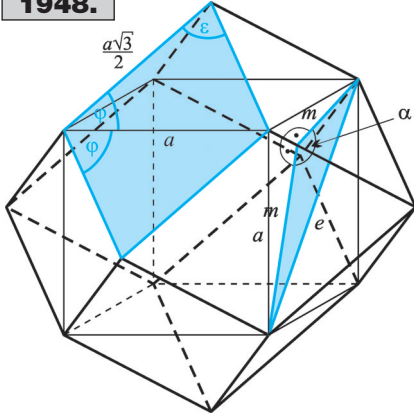
vagyis az eredeti térfogat  $\frac{3}{8}$ -át vágjuk le összesen. A megmaradó

rész térfogata az eredeti térfogat  $\frac{5}{8}$ -a:  $V = \frac{5}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{24} a^3}}$ .

**1946.**



1948.



**1947.**  $a$  élű tetraéder felszíne  $\sqrt{3}a^2$ ;  $a$  élű oktaéder felszíne  $2\sqrt{3}a^2$ ;  $a$  élű ikozaéder felszíne  $5\sqrt{3}a^2 \Rightarrow \Rightarrow F_t : F_o : F_i = (\sqrt{3}a^2) : (2\sqrt{3}a^2) : (5\sqrt{3}a^2) = 1 : 2 : 5$ .

**1948.** A kocka egy-egy lapjára egy-egy négyoldalú gúlát építettünk, aminek magassága a kocka élének fele.  $\Rightarrow$  A gúla oldallapja  $45^\circ$ -ot zár be az alaplappal.  $\Rightarrow$  Két szomszédos gúla egymáshoz csatlakozó lapjai egy síkban vannak.  $\Rightarrow$  A kocka élei nem élei az új testnek. a) Csúcsok:  $6 + 8 = 14$ . Minden kockaélhez csatlakozik egy lap.  $\Rightarrow 12$  lapja van. 12 db négyszöglap csatlakozik egymáshoz.  $\Rightarrow 24$  éle van. b) A határoló lapok négyszögek, amelyeknek minden

oldala a kocka fél testátlójával egyenlő.  $\Rightarrow$  Rombuszok határolják.

c) Nem szabályos test, mert a határoló lapok nem szabályos síkidomok.

d) Az él a kocka testátlójának fele:  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

e)  $\cos \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi \approx 54,7^\circ \Rightarrow 2\varphi \approx 109,4^\circ \Rightarrow \epsilon = 180^\circ - 2\varphi \approx 70,6^\circ$ . Két szomszédos él hajlásszöge  $70,6^\circ$ , illetve  $109,4^\circ$ .

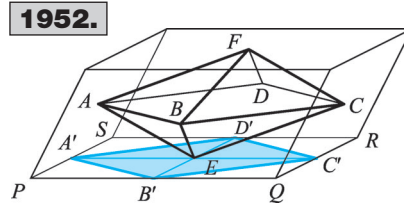
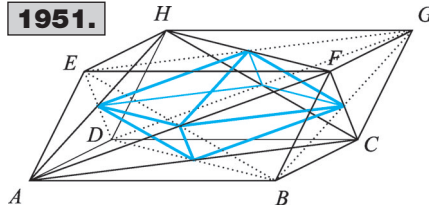
f)  $m = a \cdot \sin \varphi = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ;  $e = a\sqrt{2}$ .  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{m} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 120^\circ}}$ .

g)  $F = 12 \cdot t_{\text{rombusz}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \underline{\underline{6\sqrt{2} \cdot a^2}}$ .

h)  $V = V_{\text{kocka}} + 6V_{\text{gúla}} = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \underline{\underline{2a^3}}$ .

**1949.** A kocka egy lapjának oldalaira mint élekre fektetett síkok  $45^\circ$ -os szöget zárnak be ezzel a lappal.  $\Rightarrow$  Egy közös pontjuk van, ami egyforma távolságra van mind a négy éltől, és a  $45^\circ$ -os hajlásszög miatt feleakkora távolságra a laptól, mint a kocka éle. A közös pont a kocka középpontjának tükörképe a lappal.  $\Rightarrow$  A keletkező test rombdodekaéder (lásd 1948. feladat).

**1950.** Tudjuk, hogy a tér egybevágó kockákkal hézagtalanul kitölthető. Vegyünk hat egybevágó  $a$  élű kockát, amelyek körülzárnak egy velük egybevágó „üreget”. A hat kockából kialakítható rombdodekaéderek mindegyikének egy-egy része az „üregbe” nyúló  $a$  alapélű  $\frac{a}{2}$  magasságú szabályos négyoldalú gúla. A hat gúla hézagmentesen kitölti az üreget, tehát a hat kockához tartozó rombdodekaéder is kitölti a tér aktuális részét. Az eljárás a rombdodekaéderek bármely csúcsánál megismételhető.



**1951.** Háromszögek határolják, 6 csúcsa, 8 lapja, 12 éle van.  $\Rightarrow$  A test oktaéder.

**1952.** Ez a test egy oktaéder. Térfogata:  $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{ABCD} \cdot d(F; ABCD)$ . Az oktaéder csúcsai az oldallapok középpontjai, ezért  $AB \parallel CD \parallel SQ$ ;  $BC \parallel DA \parallel PR$ ;  $AB = SQ : 2$ ;  $BC = PR : 2$ ;  $DC = SQ : 2$  és  $DA = PR : 2$ , vagyis az  $ABCD$  paralelogramma elhelyezhető a  $PQRS$  paralelogrammában ( $A'B'C'D'$  paralelogramma).  $t_{PB'A'} = t_{PQS} : 4$ ;  $t_{QB'C'} = t_{PQR} : 4$ ;  $t_{RD'C'} = t_{RQS} : 4$ ;  $t_{SA'D'} = t_{SPR} : 4$ , ezért  $t_{ABCD} = t_{PQRS} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} t_{PQRS} = \frac{1}{2} t_{PQRS}$ , valamint  $d(F; ABCD) = \frac{1}{2} d(F; PQRS)$ . Az

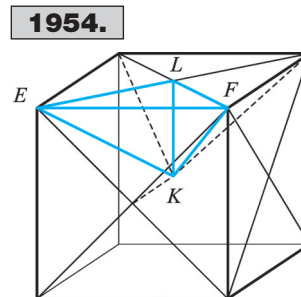
aláhúzottakból következik, hogy  $V_{\text{oktaéder}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t_{PQRS} \cdot \frac{1}{2} d(F; PQRS) = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepipedon}}$ .

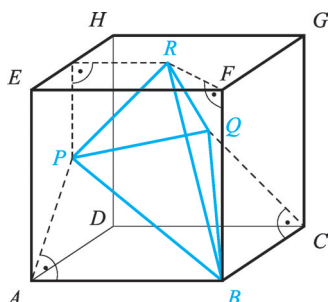
**1953.** Tekintsük az 1951. ábrát. Jelölje  $S_E$  az  $E$  csúcsra illeszkedő síkot,  $S_B$  a  $B$  csúcsra illeszkedőt és így tovább!  $S_E \parallel [AFH]$  és  $S_B \parallel [AFC]$  és  $S_G \parallel [CFH]$  és  $S_D \parallel [ACH]$ .  $[AFH]$ ,  $[AFC]$ ,  $[CFH]$ ,  $[ACH]$  síkok a paralelepipedon  $ACFH$  beírt tetraéderét határozzák meg. Hasonlóan az  $S_A$ ;  $S_F$ ;  $S_C$  és  $S_H$  síkokkal párhuzamos síkok a paralelepipedon  $EBGD$  beírt tetraéderét határozzák meg. A két beírt tetraéder közös része a paralelepipedon beírt oktaédere.  $\Rightarrow$  Az  $S_A$ ;  $S_B$ ; ...;  $S_H$  síkok által meghatározott test is egy oktaéder, ami a paralelepipedon középpontjából nagyított képe a beírt oktaédernek. Mivel  $[AFH]$  és  $[BGD]$  síkok harmadolják az  $EC$  testátlót, a nagyítás háromszoros.  $V = 3^3 \cdot V_o = 27 \cdot \frac{1}{6} V_p = \frac{9}{2} V_p$ .

**1954.** Az átlóssíkok metszésvonalai a kocka testátlói és a kocka párhuzamos lapközeppontjait összekötő egyenesek.  $\Rightarrow$  Az átlóssíkok a kockát  $6 \cdot 4 = 24$  db egybevágó derékszögű tetraéderre bontják. Legyen a kocka éle:  $a$ . Egy tetraéder térfogata  $V = \frac{a^3}{24}$ . Egy tetraéder felszíne

$$\begin{aligned} A &= t_{ELF} + t_{ELK} + t_{FLK} + t_{EFK} = t_{ELF} + 2t_{ELK} + t_{EFK} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = \\ &= \frac{1}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} a^2 = \frac{2\sqrt{2} + 1}{4} a^2. \end{aligned}$$

**1955.** Maga a gúla 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész  $\rightarrow$  5 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész  $\rightarrow$  8 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet  $\rightarrow$  5 db. Összesen 19 részre bontják a lapsíkok a teret.



**1958.**

**1956.** Maga az oktaéder 1 térrész. Minden laphoz illeszkedik 1-1 térrész  $\rightarrow$  8 db. Minden élnél kialakul 1-1 térrész  $\rightarrow$  12 db. Minden csúcsnál kialakul 1-1 szöglet  $\rightarrow$  6 db. Összesen 27 részre bontják a lapsíkok a teret.

**1957.** Vegyük a két gúla közös alapsíkját és azt az  $n$  síkot, melyek mindegyike átmegy mindkét gúla csúcspontján és négy élt tartalmaz. A test minden éle ezen síkok valamelyikén, de csak az egyikén van rajta. Maximális számú metszéspontot kapunk, ha a metszősík ezen síkok mindegyikét olyan egyenesben metszi, amelyiknek a síkon levő két éllel van metszéspontja. a) 6; b) 8; c) 10; d)  $2(n+1)$ .

**1958.**  $AB \perp [ADHE] \Rightarrow AB \perp AP$ , ezért az  $ABP\Delta$ -re alkalmazható Pitagorasz tétele:

$$BP^2 = AP^2 + AB^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a. \text{ Hasonlóan } RFB \text{ derékszögű}$$

háromszögből, illetve  $BCQ$  derékszögű háromszögből  $RB = QB = PB = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ . Két lapközéppontból bocsássunk merőlegest a lapok közös élére, így létrejön egy derékszögű háromszög, aminek befogói  $\frac{a}{2}$  hosszúságúak, átfogója pedig a lapközéppontokat összekötő szakasz. Pitago-

rasz tétele a  $PRS$  derékszögű háromszögre:  $PR^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow PR = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ . Hasonlóan

megmutatható, hogy  $RQ = QP = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

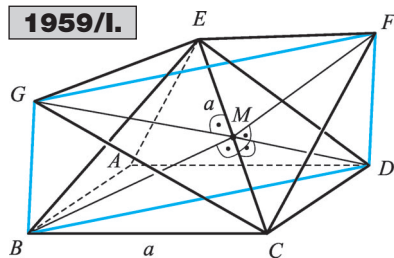
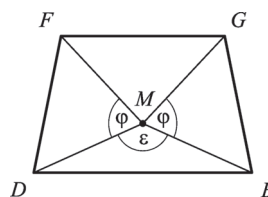
**1959.** Legyen  $EC$  felezőpontja  $M$ .  $BCE\Delta$  szabályos, ezért  $BM \perp EC$  és  $CGE\Delta$  szabályos, ezért  $GM \perp EC \Rightarrow EC \perp [BGM]$ . Hasonlóan:  $EC \perp [DFM]$ .  $\Rightarrow B; G; F; D$  és  $M$  egy síkban vannak.

A négyoldalú gúlából és a két tetraéderből álló test szimmetriája miatt  $BDFG$  húrtrapéz.

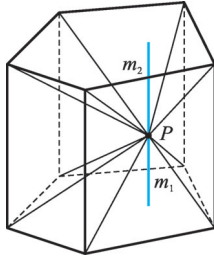
$DM = BM = GM = FM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , mert egy-egy  $a$  oldalú szabályos háromszög magasságai.

$DB = \sqrt{2}a$ ;  $FD = BG = a$ . A koszinusztétel a  $DBM\Delta$ -re:  $DB^2 = DM^2 + BM^2 - 2DM \cdot BM \cdot \cos \varepsilon$ , azaz  $2a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos \varepsilon \Rightarrow \cos \varepsilon = -\frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon \approx 109,47^\circ$ . A koszinusztétel az

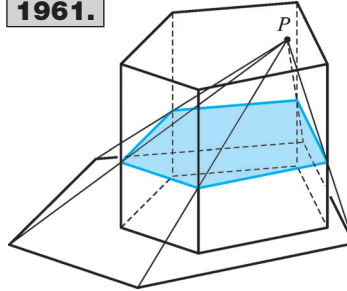
$FDM\Delta$ -re:  $FD^2 = FM^2 + DM^2 - 2FM \cdot DM \cdot \cos \varphi$ , azaz  $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos \varphi \Rightarrow$

**1959/I.****1959/II.**

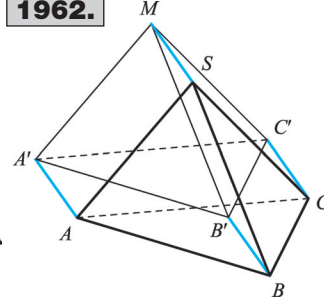
1960.



1961.



1962.



II

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 70,53^\circ. 2\varphi + \varepsilon + \angle FMG = 360^\circ \Rightarrow \angle FMG \approx 109,47^\circ = \varepsilon \Rightarrow \triangle DMB \cong \triangle FMG \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FG = DB = \sqrt{2} \cdot a.$$

A fentiekből az is következik, hogy  $DBGF$  téglalap, vagyis  $DB \perp BG \parallel DF$ .

**1960.** Legyen a hasáb tetszőleges belső pontja  $P$ . Ha elvesszük a hasázból azokat a gúákat, amelyeknek közös csúcsa  $P$  és alaplapjaik az oldallapok, akkor két gúla marad, amelyeknek közös csúcsa  $P$  és alaplapjaik a hasáb alap- és fedőlapja. Ezek térfogatát elvéve a hasáb térfogatából megkapjuk a keresett térfogatot.

$$V = V_{\text{hasáb}} - V_1 - V_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_1 - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m_2 = t_{\text{alap}} \cdot m - \frac{1}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot t_{\text{alap}} \cdot m = \frac{2}{3} V_{\text{hasáb}} = \text{állandó.}$$

**1961.** A metszősík az alaplappal egybevágó síkidomot vág ki a hasázból. Legyen a fedőlap tetszőleges pontja  $P$ . A feltételeknek megfelelő  $P$  csúcsú gúla alaplapja a síkmetszet  $P$  középpontból nagyított képe, mert a metszősík párhuzamos az alaplappal. Ezért a feltételeknek megfelelő gúához hasonló az a gúla, amelynek csúcsa  $P$  és alaplapja a síkmetszet. (A hasonlóság aránya  $\lambda$ .)

$$V_h = t \cdot m; \quad V_g = \frac{1}{3} \cdot \lambda^2 \cdot t \cdot m, \quad \text{valamint} \quad V_h = V_g \Rightarrow \lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda =$$

$$= \sqrt{3}. \quad \lambda \text{ a két gúla magasságának is aránya} \Rightarrow \frac{m}{m_1} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

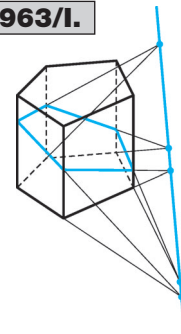
$$\Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3} m}} \text{ távolságra kell legyen a fedőlaptól a}$$

metszősík.

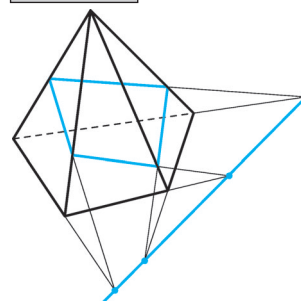
**1962.**  $ABC\Delta$ -et eltoljuk  $\vec{SM}$ -ral, az  $A'B'C'\Delta$ -et kapjuk.  $ABCS$  tetraéder egybevágó  $A'B'C'M$  tetraéderrel, így térfogatuk egyenlő. Az oldallapokra illeszkedő hasábok térfogatának összege:  $V_{ABSA'B'M} + V_{BCSB'C'M} + V_{ACSA'C'M} = V_{ABCA'B'C'M} - V_{ABCS} = V_{ABCA'B'C'M} - V_{A'B'C'M} = V_{ABCA'B'C'}$ , vagyis egyenlő az alaplapra illeszkedő hasáb térfogatával.

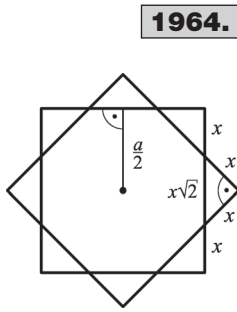
**1963.** Az alaplap oldalegyenesei az alaplap síkjában vannak. A síkmetszet oldalegyenesei a metsző síkon vannak.  $\Rightarrow$  A síkmetszet oldalegyenesei az alaplap megfelelő oldalegyenesével való metszéspontjai mindkét síkon rajta vannak, vagyis a két sík metszévonalának pontjai.  $\Rightarrow$  Egy egyenesen vannak.

1963/I.

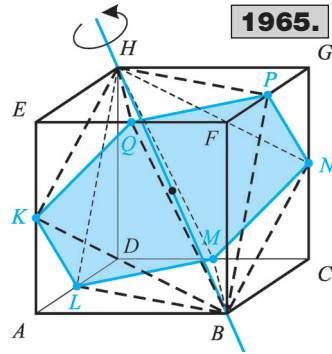


1963/II.

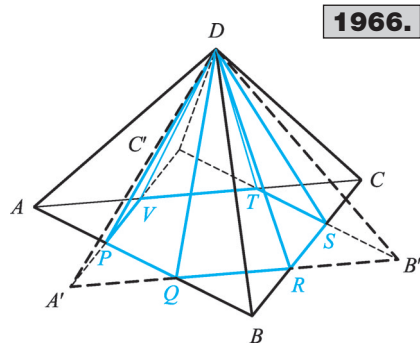




1964.



1965.



1966.

**1964.** Az 1964. ábrán az eredeti és az elforgatott kocka felülnézetben látható. a) Az eredeti és az elforgatott kocka közös része egy szabályos nyolcszög alapú hasáb, amelynek magassága  $a$ , alaplapjának egy oldala:  $(\sqrt{2} - 1)a$ , mert  $x + \sqrt{2} \cdot x + x = a \Rightarrow x = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} a \Rightarrow \sqrt{2} \cdot x =$

$$= (\sqrt{2} - 1)a. V_h = t_a \cdot m = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = 2(\sqrt{2} - 1)a^3.$$

b) Az együttes térfogat:  $V = 2a^3 - V_h = 2a^3 - 2(\sqrt{2} - 1)a^3 = 2(2 - \sqrt{2})a^3.$

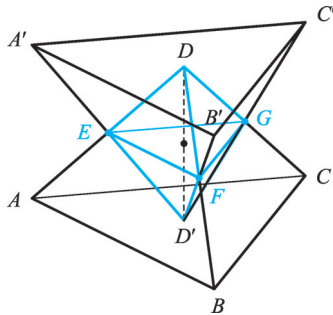
**1965.** A kockát a  $BH$  testátló körül forgatjuk el  $60^\circ$ -kal.  $\Rightarrow B$  és  $H$  fixpontok.  $KLMNPQ$  szabályos hatszög csúcsai a kocka élfelező pontjai, síkja merőleges a  $BH$  testátlóra.  $\Rightarrow A$  hatszöget a forgatás saját magába viszi át, ezért  $KLMNPQ$  az eredeti és az elforgatott kocka közös síkmet-szete.  $N' \equiv P; P' \equiv Q; H' \equiv H \Rightarrow G'$  a  $PQH\Delta$  fölé írt gúla csúcsa lesz.  $\Rightarrow$  Az eredeti és az elforgatott kocka közös része a  $KLMNPQ$  alaplapú,  $H$ , illetve  $B$  csúcsú gúlákból álló test.

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot t_{KLMNPQ} \cdot \frac{BH}{2} = \frac{1}{3} \cdot t_{KLMNPQ} \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{3}{4}a^3.$$

**1966.** Az  $ABCD$  tetraédert elforgattuk  $60^\circ$ -kal a  $D$ -n áthaladó magasságvonala körül  $\rightarrow A'B'C'D'$  tetraéder. A két tetraéder közös része a  $PQRSTV$  szabályos hatszög alapú,  $D$  csúcsú egyenes gúla. ( $P; Q; R; S; T; V$  az alapélek harmadolópontjai.)

$$V = \frac{1}{3} \cdot t_{PQRSTV} \cdot m = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{\sqrt{2}}{18} a^3.$$

1967.



**1967.** A tetraéder és a sík közös pontjai a tükrözés fixpontjai, ezért  $EFG\Delta$  az eredeti és a tükörkép tetraéder metszéspontja.  $D$  képe a magasság talppontja, tehát  $D'$  az  $ABC\Delta$  súlypontja.  $\Rightarrow D$  az  $A'B'C'\Delta$  súlypontja.  $\Rightarrow$  Az eredeti és a tükörkép tetraéder közös része az  $EFGD$  és  $EFGD'$  tetraéderekből álló test.  $E; F$  és  $G$  élfelező pontok, ezért  $EFGD$  és  $EFGD'$

tetraéderek szabályosak, minden élük  $\frac{a}{2}$ .

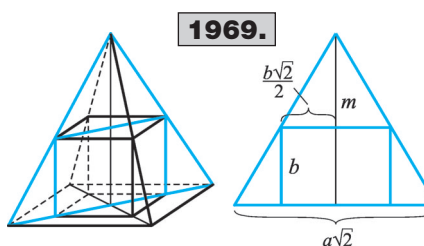
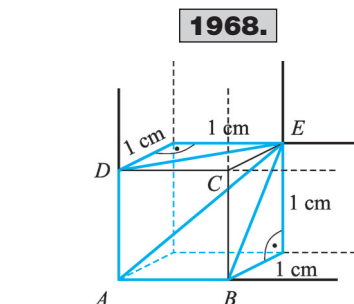
$$V = V_{EFGD} + V_{EFGD'} = 2V_{EFGD} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot V_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{48} a^3.$$

**1968.** Az egyenlő szárú derékszögű háromszög keresztmetszetű hasábot megkaphatjuk egy négyzet keresztmetszetű hasáb felezésével.  $\Rightarrow$  A sarokban egy kockából kell elvenni egy négyzet alapú gúlát ( $ABCDE$ ). Ennek térfogata a kocka térfogatának harmada, így a megmaradó rész a kétharmada. A szükséges gitt térfogata:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (a-2) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (b-2) + \\ & + 4 \cdot \left( 1 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = a-2 + b-2 + \frac{8}{3} = \\ & = \underline{\underline{a+b-\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

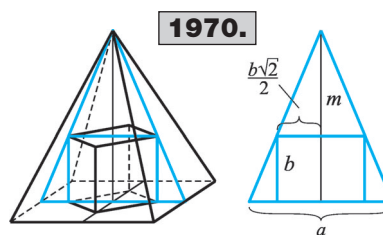
**1969.** Hasonlóság miatt:

$$\begin{aligned} \frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} &= \frac{m}{a\sqrt{2}} \Rightarrow ma - ab = mb \Rightarrow b = \frac{ma}{m+a} \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= b^3 = \left( \frac{ma}{m+a} \right)^3. \end{aligned}$$



**1970.** Hasonlóság miatt:

$$\begin{aligned} \frac{m-b}{\frac{b\sqrt{2}}{2}} &= \frac{m}{a\sqrt{2}} \Rightarrow ma - ab = mb \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow b &= \frac{ma}{m\sqrt{2} + a} \Rightarrow V = b^3 = \left( \frac{ma}{m\sqrt{2} + a} \right)^3. \end{aligned}$$



## Henger

**1971.**  $t_a = t_i$ ;  $t_a = r^2\pi$  és  $t_i = 2r \cdot m \Rightarrow r^2\pi = 2r \cdot m \Rightarrow \underline{\underline{m = 1/2 r\pi}}$ .

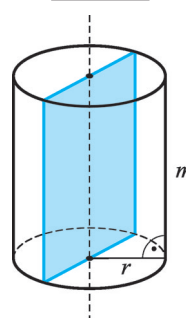
**1972.** a)  $A \approx \underline{\underline{150,8 \text{ cm}^2}}$ ; b)  $A \approx \underline{\underline{588,1 \text{ dm}^2}}$ ; c)  $A \approx \underline{\underline{70664,42 \text{ m}^2}}$ .

**1973.**  $k_a = 2r\pi = 20,33 \text{ cm}$ ;  $m - r = 11,6 \text{ cm} \Rightarrow m = r + 11,6 \text{ cm}$ .

$$\begin{aligned} A &= 2r\pi(r+m) = 2r\pi(2r+11,6 \text{ cm}) = \\ &= k_a \cdot \left( \frac{k_a}{2\pi} \cdot 2 + 11,6 \text{ cm} \right) \approx \underline{\underline{367,4 \text{ cm}^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1974.} \quad A_2 &= 2r_2\pi(r_2+m_2) = \\ &= 2(r_1+4) \cdot \pi \cdot (r_1+4+m_1+3) = \\ &= 2(r_1+4) \cdot \pi \cdot (r_1+m_1+7) = \\ &= 2\pi \cdot (r_1 \cdot (r_1+m_1) + 7 \cdot r_1 + 4 \cdot (r_1+m_1) + 28) = \\ &= 2\pi \cdot r_1 \cdot (r_1+m_1) + 2\pi \cdot (7r_1+4(r_1+m_1)+28) = \\ &= A_1 + 2\pi \cdot (11r_1+4m_1+28). \Rightarrow 923,4 = \\ &= 2\pi \cdot (11r_1+4m_1+28) \Rightarrow m_1 = 29,74 - 2,75r_1. \\ A_1 &= 2r_1\pi \cdot (r_1+29,74 - 2,75r_1) = \\ &= 2r_1\pi \cdot (29,74 - 1,75r_1). \Rightarrow 659,6 = 2r_1\pi \cdot (29,74 - 1,75r_1). \end{aligned}$$

**1971.**



$1,75r_1^2 - 29,74r_1 + 104,98 = 0$ .  $(r_1)_1 \approx 12$  cm  $\Rightarrow (m_1)_1 \approx -3,26$  cm, ez nem lehet;  $(r_1)_2 \approx 5$  cm  $\Rightarrow (m_1)_2 \approx 16$  cm. Az alapkör sugara 5 cm, a magasság 16 cm.

**1975.**  $r \approx \underline{38,87}$  cm;  $m \approx \underline{48,6}$  cm.

**1976.**  $r \approx \underline{6,59}$  cm;  $m \approx \underline{20,21}$  cm.

**1977.** Körülbelül 29,3 óra.

**1978.** Körülbelül 19,6 m<sup>2</sup> bádoglemez kell.

**1979.** 1,84 kg festékre lesz szükség.

**1980.** a)  $V_1 \approx \underline{577,27}$  m<sup>3</sup>; b)  $V_2 \approx \underline{88\,053,4}$  dm<sup>3</sup>  $\approx \underline{88,05}$  m<sup>3</sup>; c)  $V_3 \approx \underline{407\,777,6}$  cm<sup>3</sup>  $\approx \underline{407,8}$  dm<sup>3</sup>.

**1981.**  $t_p \approx \underline{263,9}$  m<sup>2</sup> és  $V \approx \underline{1979,2}$  m<sup>3</sup>.

**1982.** a)  $m \approx \underline{21,14}$  cm; b)  $m \approx \underline{17,86}$  cm.

**1983.** 1. eset:  $r = a = 5,6$  cm;  $m = b = 7,9$  cm.  $A_b \approx \underline{475}$  cm<sup>2</sup>.

2. eset:  $r = b = 7,9$  cm;  $m = a = 5,6$  cm.  $A_a \approx \underline{670,1}$  cm<sup>2</sup>.

**1984.**  $A \approx \underline{764,54}$  cm<sup>2</sup> és  $V \approx \underline{1490,8}$  cm<sup>3</sup>.

**1985.**  $a = 21,7$  cm és  $b = 36,8$  cm. a)  $a$  körüli forgatás  $\Rightarrow a = m$ ;  $b = r$ .  $A_a \approx \underline{13\,526,4}$  cm<sup>2</sup> és  $V_a \approx \underline{92\,322}$  cm<sup>3</sup>. b)  $b$  körüli forgatás  $\Rightarrow a = r$ ;  $b = m$ .  $A_b \approx \underline{7976,2}$  cm<sup>2</sup> és  $V_b \approx \underline{54\,439,9}$  cm<sup>3</sup>.

c)  $a$  felező merőlegese körüli forgatás  $\Rightarrow r = \frac{a}{2}$ ;  $m = b$ .  $A_{t_1} \approx \underline{3248,4}$  cm<sup>2</sup> és  $V_{t_1} \approx \underline{13\,609,9}$  cm<sup>3</sup>.

d)  $b$  felező merőlegese körüli forgatás  $\Rightarrow r = \frac{b}{2}$ ;  $m = a$ .  $A_{t_2} \approx \underline{4635,9}$  cm<sup>2</sup> és  $V_{t_2} \approx \underline{23\,080,5}$  cm<sup>3</sup>.

**1986.** 1. eset:  $b = 2r_1\pi$  és  $a = m \Rightarrow V_1 = \frac{b^2 a}{4\pi}$ . 2. eset:  $a = 2r_2\pi$  és  $b = m \Rightarrow V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a} = \frac{33}{26}.$$

**1987.** A szükséges bádogg körülbelül 627,35 cm<sup>2</sup>.

**1988.**  $m \approx \underline{21,68}$  cm.

**1989.** A víz szintje körülbelül 2,04 dm-t emelkedik.

**1990.** Két beosztás távolsága körülbelül 1,572 cm.

**1991.** A kapilláris cső belső átmérője kb. 1,248 mm.

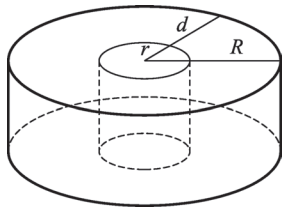
**1992.**  $V \approx \underline{64,34}$  hl.

**1993.**  $V = (R^2\pi - r^2\pi) m = m\pi (R^2 - r^2) \approx 0,1508$  m<sup>3</sup>  $\approx 150,8$  dm<sup>3</sup>.

A malomkő tömege:  $V \cdot \rho = \underline{377}$  kg.

**1994.**  $r \approx \underline{9}$  cm;  $m \approx \underline{37,64}$  cm.

**1993.**



**1995.**  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . **1996.**  $\frac{A_{p_1}}{A_{p_2}} = \frac{r_1 m_1}{r_2 m_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$ .

**1997.**  $V = r^2 \pi m \Rightarrow m = \frac{V}{r^2 \pi}$ . Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.  $t_p + t_a = 2r \pi m + r^2 \pi =$

$$= 2r \pi \cdot \frac{V}{r^2 \pi} + r^2 \pi = \frac{2V}{r} + r^2 \pi = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + r^2 \pi \geq$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot r^2 \pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2 \pi} = \text{állandó. Az összeg minimális,}$$

ha egyenlőség van, azaz  $\frac{V}{r} = r^2 \pi \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \Rightarrow m = \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}} \cdot \pi} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \Rightarrow \underline{\underline{m = r}}$ . A henger

magassága egyenlő az alapkör sugarával.

**1998.** Felhasználjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} A = 2r^2\pi + 2r\pi m &\Rightarrow m = \frac{A}{2\pi} - r \Rightarrow V = r^2\pi \cdot \left(\frac{A}{2r\pi} - r\right) = \frac{Ar}{2} - r^3\pi = r\left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow V^2 = r^2 \cdot \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) \cdot \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) \cdot \left(\frac{A}{2} - r^2\pi\right) \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi r^2 + \frac{A}{2} - r^2\pi + \frac{A}{2} - r^2\pi}{3}\right)^3 &= \frac{A^3}{54\pi}. \text{ A térfogat maximális, ha egyenlőség van, azaz} \end{aligned}$$

$$\frac{A}{2} - r^2\pi = 2\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \Rightarrow m = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = 2r \Rightarrow \underline{\underline{m = 2r}}, \text{ azaz a henger egyenlő oldalú.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1999.} \quad r : m = 5 : 6 &\Rightarrow r = \frac{5}{6} m \Rightarrow V = r^2\pi m = \frac{25}{36} m^2\pi m \Rightarrow m^3 = \frac{36}{25} \cdot \frac{V}{\pi} \Rightarrow m \approx 11,45 \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow r &\approx 9,54 \text{ cm} \Rightarrow A = 2r\pi(r + m) \approx \underline{\underline{1258,17 \text{ cm}^2}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2000.} \quad V \approx \underline{\underline{28,13 \text{ cm}^3}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2001.} \quad t_1 = 2rm = 969,5 \text{ cm}^2. \quad A = 2r\pi(r + m) &= 2r\pi \cdot \left(r + \frac{969,5}{2r}\right) = 2r^2\pi + 969,5 \pi = \\ = 4532,6 \text{ cm}^2 &\Rightarrow r^2 = 236,6 \Rightarrow r \approx 15,38 \text{ cm} \Rightarrow m \approx 31,52 \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow V = r^2\pi m &\approx \underline{\underline{23\,428,84 \text{ cm}^3}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2002.} \quad V \approx \underline{\underline{1,06 \text{ m}^3}}.$$

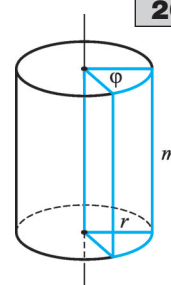
$$\mathbf{2003.} \quad V \approx \underline{\underline{12\,379 \text{ cm}^3}} \text{ és } A \approx \underline{\underline{2963 \text{ cm}^2}}.$$

**2004.** A keletkezett részek térfogatának aránya egyenlő az alapkörök középponti szögeinek arányával.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{40^\circ}{360^\circ} =$

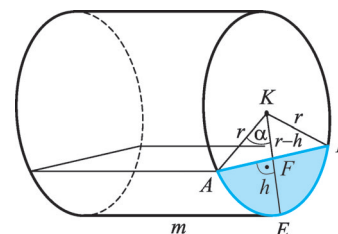
$$\begin{aligned} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_1 = \frac{V}{9}, \text{ ezért } V_1 = \frac{r^2\pi m}{9} = \frac{36 \cdot \pi \cdot 11}{9} &= 44\pi \Rightarrow V_1 \approx \\ \approx \underline{\underline{138,23 \text{ cm}^3}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{2005.} \quad \cos \alpha = \frac{r-h}{r} \Rightarrow \alpha = 52^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 0,908.$$

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \hat{\alpha} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \sin 2\alpha &\approx 2,86 \text{ cm}^2 \Rightarrow V_{\text{beton}} = \\ = tm \approx 7144,9 \text{ m}^3 &\Rightarrow m_{\text{cement}} \approx 7144,9 \cdot 150 \text{ kg} \approx 1\,071\,733,7 \text{ kg} \approx \\ \approx \underline{\underline{1071,7 \text{ t}}}. \end{aligned}$$



2004.



2005.